ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. Müller-Breslau-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

Bd. 1 Ende Februar 1921 **Heft 1**

INHALT:

VON MISES, Aufgaben und Ziele der angewandten Mathematik

HAUPTAUFSÄTZE:
PRANDTL, Härte plastischer Körper / NÁDAI, Versuche hierzu / POHLHAUSEN, Fachwerkschwingungen / LICHTENSTEIN, Stromleitung

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE:
RATZERSDORFER, Probleme der Flugzeugstatik / BIEBERBACH, Praktische Analysis

KURZE AUSZÜGE

BUCHBESPRECHUNGEN

KLEINE MITTEILUNGEN

NACHRICHTEN



VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

INHALTSÜBERSICHT

A. Verfasserverzeichnis

(H. = Hauptaufsätze, Z. B. = Zusammenfassende Berichte, K. A. = Kurze Auszüge, Bb. — Buchbesprechungen, Kl. M. = Kleine Mitteilungen, N. = Nachrichten, Z. = Zuschriften an den Herausgeber.)

Seite

Alt, H. Zur Synthese der ebenen Mechanismen. H. . . . . . . 373—398
Bieberbach, L. Über neuere Lehrbücher der praktischen Analysis. Z. B. . . . . 61—67
— Praktische Analysis. K. A. . . 146—147
— Zur Ausbildung der Oberlehrer an den Technischen Hochschulen. Kl. M. . . . . 230—232
Blaschke, W. Felix Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I. Bb. . . . . . 332—334
Bock, H. Zum Keplerschen Problem. Z. 424
Brauer, E. A. Unterteilung eines Funktionsmaßstabes. Kl. M. . . 153—154
Doetsch, G. Über die graphische Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung. H. . . 464—466
Feigl, G. Hermann Rothe, Vorlesungen über höhere Mathematik. Bb. . . . . 223—224
Föppl, L. Neuere Fortschritte der technischen Elastizitätstheorie. Z. B. . . . . 466—481
— Festigkeitslehre. K. A. . . . 329—331
Föppl, O. Drehschwingungen von Wellen und geradlinige Schwingungen von Massen zwischen Federn. H. . . . . 367—373
Fuchs, R. Beiträge zur Prandtlschen Tragflügeltheorie. H. . . 106—115
Goldziher, K. Miscellen zur politischen Arithmetik. Kl. M. . . 414—416
Gravelius, H. Über die Korrelationsmethode. H. . . . . . 199—205
Hak, J. Über eine neue Art von Rechentafeln. Kl. M. . . . . . 154—157
— Graphische Bestimmung der Selbstinduktivität gerader zylindrischer Leiter beliebiger Querschnittsform. Kl. M. . . . . 227—230
Hamel, G. Elementare Mechanik. K. A. . . . . 219—220
— Duffing, Erzwungene Schwingungen. Bb. . . . . 72—73
— Cotton, Cours de mécanique générale. Bb. 73
— Hahn, Die Starre. Fischer, Die Schraubenfeder. Bb. . . . . 150—152
— Love, Theoretische Mechanik. Bb. 413
— R. Seeliger in Verbindung mit F. Henning und R. v. Mises, Aufgaben aus der theoretischen Physik. Bb. . . . . 413—414
— Über das Studium der angewandten Mathematik und die Reformbestrebungen an den Technischen Hochschulen. Kl. M. . . . . . 77—79
— Angewandte Mathematik an der Technischen Hochschule Berlin. N. 160
— Zur Oberlehrerausbildung. Z. . 342—343
Hencky, H. Die Berechnung dünner rechteckiger Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit. H. . . . . 81—89
— Kippsicherheit und Achterbildung an geschlossenen Kreisringen. H. 451—455
— Festigkeitslehre. K. A. . . . . 328—329
— Berechnung dünner Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit (Erwiderung). Z. . . . . 413—424
Heun, K. Rudolf Mayer, Die Knickfestigkeit. Bb. 225
Hopf, L. u. Trefftz, E. Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben. H. . . . . 290—298
Hotopp, L. Massenanziehung in einem Kreisringkörper. Kl. M. . 487—488
Jaffé, G. Unstetige und mehrdeutige Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen. Z. B. . . . 398—410
Jung, W. Über Umsteuerungen, eine zeichnerische Getriebestudie. H.
Kármán, Th. v. Über laminare und turbulente Reibung. H. . . 233—252
— Bach, Elastizität und Festigkeit. Bb. . . . . 486—487
Kaufmann, W. Beitrag zur Berechnung räumlicher Fachwerke von cyklischer Symmetrie mit biegungssteifen Ringen und Meridianen. H. . . . . 345—364
Körner, K. Anwendung des logarithmischen Druck-Volumen-Bildes für Wärmevorgänge. H. . . . 189—194
— Stephan, Die Technische Mechanik des Maschineningenieurs. 1. Band: Allgemeine Statik. Bb. . 412—413
Laski, G. Entscheidender Fortschritt in der Lehre vom Atombau. Kl. M. . . . . 157—159
— Neue Forschungen über die Natur der chemischen Elemente. Kl. M. . . . . 338—340
Latzko, H. Der Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom. H. . . . . . 268—290

	Seite
Lewe, Festigkeitslehre. K. A.	331–332
Lichtenstein, L. Über ein Problem der Stromleitung. H.	42–47
Ludwig, W. Über die Prüfung für das höhere Schulamt an der Technischen Hochschule Dresden. Kl. M.	340–341
Mises, R. v. Über die Aufgaben und Ziele der angewandten Mathematik.	1–15
— Über die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse. H.	121–124
— Das Problem der Iterationen. H.	298–307
— Über die gegenwärtige Krise der Mechanik. H.	425–431
— Hydraulik und Hydromechanik. K. A.	67–72
— Praktisch Analysis. Baumechanik. K. A.	145–146
— Reibung. K. A.	222–223
— Einfache Quadraturformel. Kl. M.	73–74
— Steuertarif und Ausgleichsrechnung. Kl. M.	74–77
— Lagerreibung unter Einfluß der Temperatur. Kl. M.	225–226
— Grammel, Der Kreisel. Bb.	148–149
— Zech-Cranz, Aufgabensammlung. Bb.	149–150
— Hamel, Grundbegriffe der Mechanik. Bb.	224
— Hermann Amandus Schwarz †. N.	494–495
— Zur Oberlehrerausbildung. Z.	343–344
Mohr, O. Betrachtungen über die Planetenbewegung. H.	161–174
Mononobe, N. Die Eigenschwingungen eingespannter Stäbe von veränderlichem Querschnitt. H.	444–451
Nádai, A. Versuche über die plastischen Formänderungen von keilförmigen Körpern aus Flußeisen. H.	20–28
— Festigkeitslehre. K. A.	481–485
Neményi, P. Über die Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Balken. H.	89–96
— Lösung des Torsionsproblems für Stäbe mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt. H.	364–367
Noether, F. Das Turbulenzproblem. Z. B.	125–138
— Das Turbulenzproblem. Nachtrag und Berichtigung. Z. B.	218–219
— Festigkeitslehre. K. A.	329
Nusselt, W. van Rinsum, Die Wärmeleitfähigkeit von feuerfesten Steinen. Bb.	335–336
Pfleiderer, C. Anwendung der elementaren Turbinentheorie auf die Berechnung der Windräder. H.	180–188
Pohlhausen, E. Berechnung der Eigenschwingungen statisch-bestimmter Fachwerke. H.	28–42
— Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung. H.	115–121
— Wärme. K. A.	410–412
Pohlhausen, K. Zur Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. H.	252–268
Popoff, K. Über eine Eigenschaft der ballistischen Kurve und ihre Anwendung auf die Integration der Bewegungsgleichungen. H.	96–106
Pöschl, Th. Über die Spannungserhöhung durch kreisförmige Löcher in einem gezogenen Bleche. H.	174–180
— Bisherige Lösungen des Torsionsproblems. Z. B.	312–328
— Druckfehlerberichtigungen und Nachträge	496
Prandtl, L. Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden. H.	15–20
— Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz. H.	431–436
Ratzersdorfer, J. Probleme der Flugzeugstatik. Z. B.	47–61
— Baumechanik. K. A.	144–145
— van Gries, Flugzeugstatik. Bb.	334–335
— Zur Berechnung von steifen Rahmentragwerken mit Momentengleichungen. Kl. M.	416–418
Reissner, H. Funk, Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Bb.	147–148
— H. Müller-Breslau. N.	159–160
Rothe, R. Esselborn, Lehrbuch der Mathematik. Bb.	485
Scheffers, G. Ein einfaches Werkzeug für gewisse flächentreue Abbildungen der Ebene. Kl. M.	418–419
Schiller, L. Experimentelle Untersuchungen zum Turbulenzproblem. H.	436–444
Schrutka, L. Über einige besondere Verwendungsarten der Rechenmaschine. H.	195–199
Schur, I. Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen. H.	307–311
Trefftz, E. Prandtl'sche Tragflächen- und Propeller-Theorie. Z. B.	206–218
— s. a. Hopf.	
Wallenberg, G. Die Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Technik. Z. B.	138–143
Walther, A. Maximum und Minimum eines Newtonschen Potentials auf Kugeln. Kl. M.	336–338
Weber, C. Berechnung dünner Platten mit verschwindender Biegungsstreifigkeit. Z.	423
Werkmeister, P. Ermittlung der plausibelsten Geraden einer fehlerzeigenden Punktreihe. Kl. M.	491–494
Zimmermann. Tafel zur Bestimmung der Moment-Größtwerte eines Balkens. Kl. M.	489–491

B. Sachverzeichnis

Aeromechanik und Flugtechnik.

Seite

Fuchs, R. Beiträge zur Prandtlschen Tragflügel-Theorie. H. . . 106—115

Ratzersdorfer, J. Probleme der Flugzeugstatik. Z. B. . . . . . 47—61

— van Gries, Flugzeugstatik. Bb. 334—335

Trefftz, E. Prandtlsche Tragflächen- und Propeller-Theorie. Z. B. 206—218

Praktische Analysis.

Bieberbach, L. Über neuere Lehrbücher der praktischen Analysis. Z. B. . . . . 61—67

— Praktische Analysis. K. A. . . 146—147

Brauer, E. A. Unterteilung eines Funktionsmaßstabes. Kl. M. . . . 153—154

Doetsch, G. Über die graphische Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung. H. . . 464—466

Feigl, G. Hermann Rothe, Vorlesungen über höhere Mathematik. Bb. . . . . 223—224

Hak, J. Über eine neue Art von Rechentafeln. Kl. M. . . . . . . 154—157

Mises, R. v. Einfache Quadraturformel. Kl. M. . . . . 73—74

— Praktische Analysis. K. A. . . 145—146

Rothe, R. Esselborn, Lehrbuch der Mathematik. Bb. 485

Wallenberg, G. Die Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Technik. Z. B. . . . . 128—143

Einführung einer einheitlichen Vektor-Schreibweise. N. . . . . . 421—422

Politische Arithmetik.

Goldziher, K. Miszellen zur politischen Arithmetik. Kl. M . . 414—416

Mises, R. v. Steuertarif und Ausgleichsrechnung. Kl. M. . . . 74—77

Praktische Arithmetik und Algebra.

Schrutka, L. Über einige besondere Verwendungsarten der Rechenmaschine. H. . . . . . . 195—199

Schur, I. Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen. H. . 307—311

Ausbildung.

Bieberbach, L. Zur Ausbildung der Oberlehrer an den Technischen Hochschulen, ein neuer Vorschlag. Kl. M. . . . . 230—232

Hamel, G. Über das Studium der Angewandten Mathematik und die Reformbestrebungen an den Technischen Hochschulen. Kl. M. . . 77—79

Seite

— Angewandte Mathematik an der Technischen Hochschule Berlin. N. 160

— Zur Ausbildung der Oberlehrer an den Technischen Hochschulen. Z. . . . . 342—343

Ludwig, W. Über die Prüfung für das höhere Schulamt an der Technischen Hochschule Dresden. Kl.M. 340—341

Mises, R. v. Über die Aufgaben und Ziele der angewandten Mathematik . . . . 1—15

— Zur Oberlehrerausbildung. Z. . . 343—344

Mathematik und Physik an den preußischen Technischen Hochschulen. N. 342

Ballistik.

Popoff, K. Über eine Eigenschaft der ballistischen Kurve und ihre Anwendung auf die Integration der Bewegungsgleichungen. H. . . . 96—106

Baumechanik.

Kaufmann, W. Beitrag zur Berechnung räumlicher Fachwerke von cyklischer Symmetrie mit biegungssteifen Ringen und Meridianen. H. . . . . 345—364

Lewe. Festigkeitslehre. K. A. . 331—332

Mises, R. v. Baumechanik. K. A. 145—146

Pohlhausen, E. Berechnung der Eigenschwingungen statisch bestimmter Fachwerke. H. . . . 28—42

Ratzersdorfer, J. Baumechanik. K. A. . . . . 144—145

— Zur Berechnung von steifen Rahmentragwerken mit Momentengleichungen. Kl. M. . . . . . 416—418

Reißner, H. Funk, Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Bb. . . . 147—148

Zimmermann. Tafel zur Bestimmung der Moment-Größtwerte eines Balkens. Kl. M. . . . . . 489—491

Elastizität.

Föppl, L. Neuere Fortschritte der technischen Elastizitätstheorie. Z. B. . . . . 466—481

Föppl, O. Drehschwingungen von Wellen und geradlinige Schwingungen von Massen zwischen Federn. H. . . . . 367—373

Hamel, G. Hahn, Die Starre; Fischer, Die Schraubenfeder. Bb. . 150—152

Seite

Hencky, H. Die Berechnung dünner rechteckiger Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit. H. . . . . 81—89
— Kippsicherheit und Achterbildung an geschlossenen Kreisringen. H. 451—455
— Berechnung dünner Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit. (Erwiderung) Z. . . . . 423—424
Heun, K. Rudolf Mayer, Die Knickfestigkeit. Bb. 225
Mononobe, N. Die Eigenschwingungen eingespannter Stäbe von veränderlichem Querschnitt. H. . 444—451
Neményi, P. Über die Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Balken. H. . . . . . 89—96
— Lösung des Torsionsproblems für Stäbe mit mehrfach zusammenhängendem Querschnitt. H. . . 364—367
Pöschl, Th. Über die Spannungserhöhung durch kreisförmige Löcher in einem gezogenen Bleche. H. 174—180
— Bisherige Lösungen des Torsionsproblems. Z. B. . . . . . . 312—328
— Druckfehlerberichtigungen und Nachträge hierzu 496
Weber, C. Berechnung dünner Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit. Z. 423

Elektrizität.

Hak, J. Graphische Bestimmung der Selbstinduktivität gerader zylindrischer Leiter beliebiger Querschnittsform. Kl. M. . . . . 227—230
Lichtenstein, L. Über ein Problem der Stromleitung. H. . . 42—47

Festigkeitslehre.

Föppl, L. Festigkeitslehre. K. A. 329—331
Hencky. Festigkeitslehre. K. A. 328—329
Kármán, Th. v. Bach, Elastizität und Festigkeit. Bb. . . . . . 486—487
Nadai, A. Versuche über die plastischen Formänderungen von keilförmigen Körpern aus Flußeisen. H. . . . . 20—28
— Festigkeitslehre. K. A. . . . . 481—485
Noether, F. Festigkeitslehre. K. A. 329
Prandtl, L. Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden. H. . . . . . . 15—20

Geometrie.

Blaschke, W. Felix Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bb. . . . . 332—334
Scheffers, G. Ein einfaches Werkzeug für gewisse flächentreue Abbildungen der Ebene. Kl. M. . 418—419

Hydraulik und Hydromechanik.

Jaffé, G. Unstetige und mehrdeutige Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen. Z. B. . . . 398—410
Kármán, Th. v. Über laminare und turbulente Reibung. H. . . 233—252
Mises, R. v. Hydraulik und Hydromechanik. K. A. . . . . . 67—72
Noether, F. Das Turbulenzproblem. Z. B. . . . . 125—138
— Das Turbulenzproblem. Nachtrag und Berichtigung. Z. B. . . . 218—219
Pohlhausen, K. Zur Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. H. . . . 252—268
Prandtl, L. Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz. H. 431—436
Trefftz, E. Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben. H. . . . . . . 290—298
Schiller, L. Experimentelle Untersuchungen zum Turbulenzproblem. H. . . . . 436—444

Kinematik.

Alt, H. Zur Synthese der ebenen Mechanismen. H. . . . . . . 373—398
Jung, W. Über Umsteuerungen, eine zeichnerische Getriebestudie. 455—463

Maschinenbau.

Mises, R. v. Lagerreibung unter Einfluß der Temperatur. Kl. M. . 225—226
Pfleiderer, C. Anwendung der elementaren Turbinentheorie auf die Berechnung der Windräder. H. 180—188

Allgemeine Mechanik.

Bock, H. Zum Keplerschen Problem. Z. 424
Hamel, G. Duffing, Erzwungene Schwingungen. Bb. . . . . . 72—73
— Cotton, Cours de mécanique générale. Bb. 73
— A. E. H. Love, Theoretische Mechanik. Bb. 413
— Elementare Mechanik. K. A. . . 219—220
Körner, K. Stephan, Die Technische Mechanik des Maschineningenieurs. 1. Band: Allgemeine Statik. Bb. . . . . 412—413
Mises, R. v. Über die gegenwärtige Krise der Mechanik. H. . 425—431
— Reibung. K. A. . . . . . . 222—223
— Grammel, Der Kreisel. Bb. . . 148—149
— Zech-Cranz, Aufgabensammlung. Bb. . . . . 149—150
— Hamel, Grundbegriffe der Mechanik. Bb. 224
Mohr, O. Betrachtungen über die Planetenbewegung. H. . . . . 161—174

Persönliches.

Reißner, H. H. Müller-Breslau. N. . . . . 159—160
Herausgabe der Werke von Felix Klein. N. 80
Ehrung von Karl Heun. N. . . 232
Mises, R. v. Hermann Amandus Schwarz †. N. 494-496

Allgemeine Physik.

Seite
Hamel, G. R. Seeliger in Verbindung mit F. Henning und R. v. Mises, Aufgaben aus der theoretischen Physik. Bb. . . . . . 413—414
Hotopp, L. Massenanziehung in einem Kreisringkörper. Kl. M. . 487—489
Laski, G. Entscheidender Fortschritt in der Lehre vom Atombau. Kl. M. . . . . 157—159
— Neue Forschungen über die Natur der chemischen Elemente. Kl. M. 338—340
Walther, A. Maximum und Minimum eines Newtonschen Potentials auf Kugeln. Kl. M. . . . . . 336—338

Vorträge und Versammlungen.

Ausschüsse für technische Mechanik. N. 79
Reichsverband deutscher mathematischer Gesellschaften und Vereine. N. 80
Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik. N. 80
Berliner Ausschuß für technische Mechanik. N. 160
Die angewandte Mathematik auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. N. . . 232
Zur Versammlung der Mathematiker und Physiker in Jena. N. . . 341—342
Mathematisch-naturwissenschaftlicher Ferienkursus für Lehrer höherer Schulen. N. 342
Seite
Die angewandte Mathematik und Mechanik auf der Tagung in Jena. N. . . . . 419—420
Mathematischer Reichsverband. N. . 420—421
Technisch-Wissenschaftliches Vortragswesen Berlin. N. 423

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Gravelius, H. Über die Korrelationsmethode. H. . . . . 199—205
Mises, R. v. Über die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse. H. . 121—124
— Das Problem der Iterationen. H. 298—307
Werkmeister, P. Ermittlung der plausibelsten Geraden einer fehlerzeigenden Punktreihe. Kl. M. . . 491—494

Wärme.

Körner, K. Anwendung des logarithmischen Druck-Volumen-Bildes für Wärmevorgänge. H. . . . . 189—194
Latzko, H. Der Wärmeübergang an einen turbulenten Flüssigkeits- oder Gasstrom. H. . . . . . 268—290
Nusselt, W. van Rinsum, Die Wärmeleitfähigkeit von feuerfesten Steinen. Bb. . . . . 335—336
Pohlhausen, E. Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung. H. . . . . 115—121
— Wärme. K. A. . . . . 410—412

C. Buchbesprechungen und Kurze Auszüge

(Bb. = Buchbesprechungen, K. A. = Kurze Auszüge. Der Name des Referenten ist in Klammern beigesetzt.)

	Seite
Andrée, W. L. Vereinfachung bei Berechnung statisch unbestimmter Systeme. K. A. (Ratzersdorfer)	145
Appell, P. Drehung eines bewegten Balles. K. A. (Hamel)	219—220
Bach, C. Elastizität und Festigkeit. Bb. (Kármán)	486—487
Biel, C. Ungeklärte Erscheinung bei Schmiermittelreibung. K. A. (Mises)	68
Bleich, F. Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke. K. A. (Ratzersdorfer)	144
— Knickfestigkeit von Rahmen. K. A. (Ratzersdorfer)	144—145
Boulad, F. Zur Berechnung des durchlaufenden Balkens. K. A. (Mises)	145—146
Boussinesq, J. Anwendung der Ritzschen Methode. K. A. (Mises)	71
Carrière, M. Drehung eines bewegten Balles. K. A. (Hamel)	219—220
Carrington, H. Die Elastizitätskoeffizienten von Holzarten. K. A. (Nádai)	482
Carrington, H. Zur Bestimmung der Querdehnungszahl elastischer Körper. K. A. (Nádai)	481
Cisotti. Oberflächenwellen in geraden Kanälen. K. A. (Mises)	70
Cotton, E. Cours de mécanique générale. Bb. (Hamel)	73
Darnley. Schwingungen des mehrfach gelagerten Balkens von unveränderlichem Querschnitt. K. A. (Noether)	329
Davis, A. H. Wärmekonvektion in Strömungen und mechanische Ähnlichkeit. K. A. (E. Pohlhausen)	412
— Wärmeabfuhr und Luftwiderstand dünner Drähte. K. A. (E. Pohlhausen)	412
Delage, Y. Geschwindigkeitsmessung auf Schiffen. K. A. (Mises)	72
Domke, O. Die Ergänzungsenergie elastischer Systeme. K. A. (Lewe)	331
Duffing, G. Erzwungene Schwingungen. Bb. (Hamel)	72
— Numerische Integration von Differentialgleichungen. K. A. (Bieberbach)	147
Eichelberg. Zustandsgleichung des Wasserdampfes. K. A. (E. Pohlhausen)	411
Esselborn. Lehrbuch der Mathematik. Bb. (Rothe)	485
Faust, O. Messung der Zähigkeit. K. A. (Mises)	72
Fischer, Al. Neues Verfahren zur numerischen Integration. K. A. (Mises)	146
Fischer, C. Die Schraubenfeder. Bb. (Hamel)	150—152
Föppl, L. Einfluß von Löchern und Nuten auf die Beanspruchung von Wellen. K. A. (Hencky)	328—329
Frémont, Ch. Festigkeit von dünnen Blechen. K. A. (Nádai)	484—485
Fuchs, S. Theorie der Gleit- und Rollreibung. K. A. (Mises)	221—222
Funk, P. Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Bb. (Reißner)	147—148
Gibson, W. H. u. Jocobs, L. M. Messung der Zähigkeit. K. A. (Mises)	72
Graf, O. Druckversuche mit Holz. K. A. (Nádai)	482
Grammel, R. Der Kreisel. Bb. (Mises)	148—149
van Gries, A. Flugzeugstatik. Bb. (Ratzersdorfer)	334—335
Gümbel, L. Messung der Zähigkeit. K. A. (Mises)	72
— Gleitreibung unter Vermittlung einer keilförmigen Schmierschicht. K. A. (Mises)	221
Hahn, H. Die Starre. Bb. (Hamel)	150—152
Hamel, G. Grundbegriffe der Mechanik. Bb. (Mises)	224
Hanszel. Über Veredelungsverfahren mit inländischen Metallen. K. A. (Nádai)	482—483
Happel, H. Über das Gleichgewicht von rechteckigen und elliptischen Platten unter einer Einzellast. K. A. (Lewe)	321
Hardy, W. B. Über die Natur des Reibungsvorganges. K. A. (Mises)	222—223
Hartmann. Elastischer Stoß. K.A. (Hamel)	219
Hegly, V. M. Überfall über ein Wehr. K. A. (Mises)	68
Henning, F. s. Seeliger.	
Hertwig, A. Die Berechnung der Rahmengebilde. K. A. (Lewe)	331—332
Honda und Konno. Bestimmung des normalen Dämpfungswiderstandes von Metallen. K. A. (Nádai)	481—482
Heyn, E. Die in Metallen vorkommenden Eigenspannungen. K. A. (Nádai)	482
Heyn, E. Eine Theorie der Verfestigung von metallischen Stoffen. K. A. (Nádai)	483

	Seite
Jaffé, G. Über die Entstehung von Wirbeln. K. A. (Mises)	70
Jakob, M. Wärmeleitfähigkeit des Wassers zwischen 0 und 80°. K. A. (E. Pohlhausen)	410—411
— Zustandsgleichung des Wasserdampfes. K. A. (E. Pohlhausen)	411—412
Jessop, H. Zur Bestimmung der Querdehnungszahl elastischer Körper. K. A. (Nádai)	481
Jocobs, L. M. u. W. H. Gibson. Messung der Zähigkeit. K. A. (Mises)	72
Kann. Kegelförmige Behälterböden. K. A. (Hencky)	328
Klein, F. Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. I. Bb. (Blaschke)	332—334
Knoblauch, O. u. Jakob, M. Zustandsgleichung des Wasserdampfes. K. A. (E. Pohlhausen)	411—412
Kommerell, K. Einfache Berechnung der Logarithmen. K. A. (Mises)	146
Konno und Honda. Bestimmung des normalen Dämpfungswiderstandes von Metallen. K. A. (Nádai)	481—482
Kreuger, H. Vorrichtung zum Messen von Stößen. K. A. (Hencky)	329
Kröner, R. Energieverlust bei Querschnittserweiterung. K. A. (Mises)	67—68
Körber, F. Die Blaubrüchigkeit des Eisens. K. A. (Nádai)	483
Lecornu, L. Geometrie der Stromlinien. K. A. (Mises)	69—70
Ljungberg, K. Knickung von Rahmenstäben. K. A. (Ratzersdorfer)	145
Love, A. E. H. Theoretische Mechanik. Bb. (Hamel)	413
Markt, G. Rollwiderstand einer Lokomotive. K. A. (Mises)	223
Mayer, R. Die Knickfestigkeit. Bb. (Heun)	225
Mesnager. Geschwindigkeitsmessung auf Schiffen. K. A. (Mises)	72
Milhaud, G. Fehlergrenze bei näherungsweiser Gleichungsauflösung. K. A. (Mises)	146
Mises, R. v. s. Seeliger.	
Olive. Ballistische Kurve. K. A. (Hamel)	219
Paschoud, M. Anwendung der Ritzschen Methode. K. A. (Mises)	70—71
Pogàny, B. u. Zemplén, G. Kritische Geschwindigkeit. K. A (Mises)	71
Reinhardt, K. Festigkeitsberechnung der Schwungräder. K. A. (L. Föppl)	330—331
Richardson, A. R. Flüssigkeitsoberfläche unter Einfluß der Schwere. K. A. (Mises)	68—69
van Rinsum, W. Die Wärmeleitfähigkeit von feuerfesten Steinen. Bb. (Nusselt)	335—336
Rosenhain, W. Theorie der Härte der Mischkristalle bildenden Legierungen. K. A. (Nádai)	483
Rudeloff. Versuche über Reibung von Leder auf Eisen. K. A. (Mises)	220
Rühl, D. Experimentelle Ermittlung ebener Verschiebungs- und Spannungszustände. K. A. (L. Föppl)	329—330
Schachenmeier, W. Der Windverband von Hängebrücken sehr großer Spannweiten. K. A. (Lewe)	332
Schaper. Verfahren zum schnellen Abbau und Einbau einer aus mehreren Blechträgerüberbauten bestehenden Brücke. K. A. (Lewe)	332
Schleier, J. Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes. K. A. (Mises)	71
Schlussel. Theorie des Dynamometers. K. A. (Hamel)	220
Scheuermann, R. Gestalt und Auflösung eines fallenden Flüssigkeitsstrahles. K. A. (Mises)	71
Seeliger, R. in Verb. mit F. Henning u. R. v. Mises. Aufgaben aus der theoretischen Physik. K. A. (Hamel)	413—414
Southwell, R. V. Die freien Querschwingungen von dünnen Balken mit veränderlichem Querschnitt. K. A. (Noether)	329
Sommerfeld, A. Theorie der Schmiermittelreibung. K. A. (Mises)	221
Steinwehr, H. v. Zustandsgleichung des Wasserdampfes. K. A. (E. Pohlhausen)	411
Stephan, P. Die technische Mechanik des Maschineningenieurs. Bb. (Körner)	412—413
Timoschenko, S. Über die Stabilität versteifter Platten. K. A. (Lewe)	332
Tobin. Interpolation durch ganze rationale Funktionen. K. A. (Bieberbach)	146—147
Toepler, M. Zerreißen einer Flüssigkeitsschicht. K. A. (Mises)	71
Westgren, A. Einfluß der Kanalwände auf den Bewegungswiderstand einer Kugel. K. A. (Mises)	71
Zech-Cranz. Aufgabensammlung zur theoretischen Mechanik nebst Auflösungen. Bb. (Mises)	149
Zemplén, G. u. B. Pogany. Kritische Geschwindigkeit. K. A. (Mises)	71

Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint sechsmal jährlich, am Ende eines jeden zweiten Kalendermonates, im Jahresumfang von rund 30 Bogen. Alle Zuschriften und Sendungen, die den wissenschaftlichen Inhalt der Zeitschrift betreffen, sind an den Herausgeber

Professor Dr. von Mises,
Berlin W 30, Neue Winterfeldt-Straße 43,

alle übrigen Zuschriften an den **Verlag des Vereines deutscher Ingenieure,** Berlin NW 7, Sommerstraße 4a zu richten.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 1 **Ende Februar 1921** **Heft 1**

Inhalt:

Zur Einführung. R. v. Mises: Ueber die Aufgaben und Ziele der angewandten Mathematik . . . 1

Hauptaufsätze. L. Prandtl: Ueber die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Körper und die Festigkeit von Schneiden 15

A. Nádai: Versuche über die plastischen Formänderungen von keilförmigen Körpern aus Flußeisen 20

E. Pohlhausen: Berechnung der Eigenschwingungen statisch bestimmter Fachwerke . . . 28

L. Lichtenstein: Ueber ein Problem der Stromleitung 42

Zusammenfassende Berichte. J. Ratzersdorfer: Die Probleme der Flugzeugstatik . . 47

L. Bieberbach: Über neuere Lehrbücher der praktischen Analysis 61

Kurze Auszüge. Hydraulik und Hydromechanik 67

Buchbesprechungen. Duffing: Erzwungene Schwingungen. — Cotton: Cours de mécanique générale 72

Kleine Mitteilungen. Einfache Quadraturformel. — Steuertarif und Ausgleichsrechnung. — Studium der angewandten Mathematik und Reform der Technischen Hochschule 73

Nachrichten 79

ZUR EINFÜHRUNG

Über die Aufgaben und Ziele der angewandten Mathematik

Von **R. v. MISES** in Berlin.

Es ist im Laufe des letzten Jahrhunderts, namentlich in Deutschland, Brauch geworden der »reinen« Mathematik eine »angewandte« begrifflich gegenüberzustellen. Gehen wir aber in der Geschichte der Wissenschaften weiter zurück, so geraten wir wohl in Verlegenheit mit der Frage, wohin die Leistungen eines Archimedes oder Newton, eines Euler oder Gauß zu rechnen seien. Kann man vielleicht noch bei Gauß die einzelnen Arbeiten in solche der einen und der andern Richtung trennen, so bleibt es doch vollends unklar, ob wir Newtons Grundlegung der Differentialrechnung und der Mechanik als reine oder als angewandte Mathematik bezeichnen sollen. Auch die persönliche Einstellung des Urhebers scheint hier eine Entscheidung nicht immer zu ermöglichen: Man kennt die Ueberlieferung, die Archimedes als weltabgewandten Theoretiker auftreten läßt, während andrerseits feststeht, daß er beim Bau von Kriegsmaschinen sehr wohl seine Kenntnisse in den praktischen Dienst des Vaterlandes zu stellen wußte.

Die folgenden Zeilen versuchen es, das Gebiet der angewandten Mathematik, soweit dies möglich ist, logisch abzugrenzen, und unternehmen es zugleich, eine Andeutung über ihre hauptsächlichsten Problemgruppen, so wie sie sich dem heute tätigen Beobachter darstellen, zu geben. Natürlich darf Vollständigkeit in diesem zweiten Punkt so wenig erwartet werden, wie völlige Schärfe in dem ersten.

1. Abgrenzung nach außen. Wenn wir das, was der gewöhnliche Sprachgebrauch als Anwendungen der Mathematik oder einzelner mathematischer Lehren bezeichnet, näher zu bestimmen suchen, so finden wir sofort, wie veränderlich dieser Begriff je nach dem Standpunkt des Urteilenden ist. Der Mathematiker, der die Gedankengänge der Infinitesimal-Analysis entwickelt, spricht von »Anwendung« der Differentialrechnung auf Geometrie, wenn er die naheliegendsten geometrischen Schlüsse aus seinen Sätzen zieht. Wer sich mit einem Gebiet der theoretischen Mechanik, etwa der Elastizitätslehre, befaßt, für den ist diese Differentialgeometrie das mathematische oder theoretische Hilfsmittel, das er zur Aufstellung und Erörterung seiner Gleichungen »anwendet«. Der wissenschaftlich arbeitende Ingenieur wieder benutzt die Elastizitätslehre als »Theorie«, um zu konkreten Festigkeitsberechnungen zu gelangen, die erst für ihn eine wirklich »angewandte« Mathematik bilden. Dann kommt erst der praktische Konstrukteur, dem auch alle Festigkeitsrechnung noch hohe mathematische Theorie ist, und der mit ganz elementaren Faustformeln — der für ihn wahrhaft »angewandten« Mathematik — die Aufgaben seines Berufes meistert. Dieser Reihe kann man leicht beliebig viele ähnlich gebaute zur

Seite stellen, man denke etwa an die »Anwendung« der Analysis auf die Integration von Differentialgleichungen, die Grundgleichungen der Thermodynamik, die wärmemechanische Theorie der Dampfmaschine, endlich den Standpunkt des praktischen Dampfmaschinenkonstrukteurs; aber es lassen sich ihr auch noch an beiden Enden Glieder anfügen. Denn selbst die Sätze der Analysis bilden für den mit der Untersuchung ihrer logischen Grundlagen beschäftigten Forscher nur eine »Anwendung« und auf der andern Seite sind alle Faustformeln des Konstrukteurs noch abstrakte Theorie für den in Werkstatt oder Betrieb tätigen Techniker. Seine sachlichen Ueberlegungen aber müssen, auch wenn sie nur auf den »vier Spezies« des Elementarunterrichts beruhen, noch ebenso gut wie die reine Grundlagenforschung zur Mathematik im weitesten Sinne gezählt werden. So ergibt sich uns das folgende Bild:

Von den abstrakt-logischen Untersuchungen, die in das Gebiet der Philosophie hinübergreifen, bis zu den verstandesmäßigen, auf Zahl und Maß gerichteten Ueberlegungen des Alltags ist eine Kette von vielfach ineinander geschlungenen Gliedern gespannt, die das umfaßt, was wir im allgemeinsten Wortsinn als Mathematik bezeichnen. Jeder einzelne von uns ist nach Beruf, Anlage oder Neigung an eine bestimmte Stelle dieser Kette gesetzt, von der aus er für gewöhnlich nur einen mehr oder weniger kleinen Teil des Ganzen überblickt. Innerhalb dieses Teilgebietes zieht er willkürlich eine Grenze und nennt das, was links von ihr liegt, nach dem Abstrakteren hinüberweist, die »reine« Mathematik, das rechts liegende, den Uebergang zum praktischen Leben vermittelnde, die »angewandte«. Keinerlei absolute Trennung ist hier möglich, kein Teil des Ganzen kann völlig entfernt werden, soll die Kette ihre Spannung nicht verlieren, und jeder Streit über Berechtigung, Zweckmäßigkeit und Abgrenzung muß angesichts dieser Erkenntnis verstummen.

Man kommt auch zu keinem andern Ergebnis, wenn man versucht, die reine Mathematik als die »um ihrer selbst willen« oder »als Selbstzweck« betriebene zu erklären. Denn auf jedem Gebiet kann Einsicht und Erkenntnis um ihrer selbst willen gesucht werden, und überall kann man Forschungsergebnisse auch mit andern Zielen im Auge gewinnen. Vielleicht sieht es zunächst so aus, als ob im Gegenstand der Forschung ein von vornherein angebbarer Unterschied läge, das eine Mal wäre es etwa die Erklärung bestimmter mechanischer (physikalischer) Erscheinungen, das andere Mal die Untersuchung rein formal-rechnerischer Beziehungen, die das Interesse in Anspruch nimmt. Aber schließlich beschäftigt sich auch die Zahlentheorie selbst mit den uns objektiv gegebenen ganzen Zahlen und die Verteilung der Primzahlen in der unendlichen Zahlenreihe bildet kein grundsätzlich anders geartetes Forschungsobjekt als etwa die Bewegung der Gestirne oder die mechanische Wirkung des elektrischen Stromes. Will man vielleicht die Zahlen selbst noch nicht als »physikalische« Objekte gelten lassen, so wird es schon sehr fraglich beim Gegenstand der Geometrie, und von da führt ein ganz stetiger Uebergang zur Mechanik und weiter.

Noch ein zweiter Punkt muß aber hier besprochen werden, der die Relativität der Abgrenzung zwischen reiner und angewandter Mathematik von einer andern Seite her beleuchtet. Wenn wir heute Ueberlegungen, die unmittelbar auf den vier Grundrechnungsarten fußen, als Alltäglichkeit betrachten, wenn wir gewohnt sind, die Anfangsgründe der Algebra und der analytischen Geometrie, ja neuerdings auch die der Differentialrechnung als durch die höheren Schulen in weiten Kreisen verbreitetes Handwerkzeug anzusehen, so steht dem die Tatsache gegenüber, daß vor drei- bis vierhundert Jahren die vier Spezies einen Gegenstand des mathematischen Universitätsunterrichts bildeten und ein Jahrhundert später die Infinitesimalrechnung, als die eben erst geschaffene, höchste Abstraktion des Menschengeistes, kaum einem kleinen Kreis von Auserwählten verständlich war. Damals also lagen den großen Baumeistern, deren Werke noch heute unsere Bewunderung erregen, Ueberlegungen, die den heutigen Ingenieuren geläufig sind, nicht nur jenseits des Gebietes der »Anwendung«, sondern auch jenseits ihres Gesichtskreises überhaupt. Es ist eine interessante, hier aber nicht weiter zu verfolgende Fragestellung, wie eine solche Ausbreitung des Wissens, wie eine solche Vermehrung der Aufnahmefähigkeit des Einzelnen im Laufe der Generationen zustande kommen kann. Sicher ist, daß, von einer bestimmten Berufsstellung aus gesehen, sich die Grenze zwischen reiner und angewandter Mathematik, ja der Inhalt des mathematischen Gesichtskreises überhaupt, mit der Zeit verschiebt; die historische Entwicklung geht zweifellos dahin, ein immer steigendes Ausmaß an mathematischen Theorien in einem bestimmten Bereich des praktischen Lebens zur Geltung zu bringen. Wir müssen so unserer oben gegebenen Formulierung

noch hinzufügen: Die Stellung des Einzelnen gegenüber der Kette mathematischer Begriffsbildungen rückt im Laufe der Zeit — parallel mit dem Entstehen immer neuer Glieder — in der Richtung auf das Abstrakte immer weiter vor. Diese Entwicklung wird auch durch den von manchen Seiten mit großer Hartnäckigkeit geführten Kampf gegen das »Vordringen der Theorie« nicht gehemmt, wie ein Vergleich der heutigen Technik mit der vor etwa hundert Jahren zeigt.

Angesichts dieses Tatbestandes zweifacher Relativität der Begriffsabgrenzung müssen wir nun eine praktische Erklärung dafür suchen, was wir hier im Folgenden unter »Angewandter Mathematik« verstehen wollen. Es ist selbstverständlich, daß wir uns auf den Boden der Gegenwart stellen, und es sei hinzugefügt: auf den Standpunkt des wissenschaftlich arbeitenden Ingenieurs. Dabei soll dieses Wort über seine landläufige Bedeutung hinaus genommen werden, als Bezeichnung für jeden, der einen praktischen Beruf auf der Höhe wissenschaftlicher Erkenntnis ausübt; auch der Volkswirtschaftler, der Versicherungstechniker, der Arzt sind »Ingenieure« in diesem Sinne. Alles das, was der Ingenieur, der selbständige Arbeiten ausführt, an mathematischen Hilfsmitteln gebraucht, aus der Analysis und Geometrie, den verschieden verzweigten Teilen der Mechanik, aus der Thermodynamik und Elektrizitätslehre, aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, das soll den Gegenstand bilden, dem die Abhandlungen und Berichte dieser Zeitschrift gewidmet sind. Da dabei die Mechanik im weitesten Sinne, deren Pflege heute fast ausschließlich in den Händen der Ingenieure ruht, den Kernpunkt ausmacht und naturgemäß den breitesten Raum einnehmen wird, ist sie im Titel noch ausdrücklich genannt.

2. Innere Kennzeichnung. Wir haben uns nun zu fragen, in welcher Weise die »Angewandte Mathematik des heutigen Ingenieurs« in ihrer Methode der Forschung und Lehre gekennzeichnet wird. Zwei bekannte Gedankengänge drängen sich da auf und müssen zunächst kurz besprochen werden.

Felix Klein — dessen Name hier mit besonderer Verehrung genannt werden muß, weil er wie kein zweiter in der Gegenwart dem Standpunkt des Ingenieurs innerhalb der mathematischen Wissenschaft und der Mathematik als solcher innerhalb des gesamten Kulturlebens Geltung und Ansehen zu verschaffen gewußt hat — prägte den Gegensatz der Präzisions- und Approximations-Mathematik. Nur die erstere hat es mit den scharf umrissenen Begriffen zu tun, an die wir in der Schulzeit durch allmähliche Gewöhnung herankommen, die wir später exakt definieren lernen, um schließlich zu erfahren, daß sie einem niemals abgeschlossenen Verfeinerungs- und Vertiefungsprozeß unterliegen. Hierher gehören, wenn nur die einfachsten genannt werden sollen, der Begriff der mathematischen Linie und Fläche, der irrationalen Zahl, des Differentialquotienten. In der Approximations-Mathematik gibt es nur Linienstreifen von endlicher, wenn auch geringer Breite, Flächenschalen von endlicher Dicke, keinen Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Brüchen, die Tangenten einer Linie sind Sekanten mit nahe beieinander liegenden Schnittpunkten. Und um auch ein geläufiges Beispiel für den Unterschied in der Problemstellung anzuführen: nur in der Präzisions-Mathematik hat die Unmöglichkeit der »Quadratur des Zirkels« einen Sinn, in der Approximations-Mathematik ist sie durch Kenntnis der Zahl π (und verschiedener Näherungskonstruktionen für diese) längst erledigt.

Niemand wird verkennen, daß hier ein sehr beachtenswerter Gesichtspunkt für die Beurteilung mathematischer Begriffsbildungen aufgedeckt wurde, der auch in manchen Fällen ein Kriterium für die praktische Brauchbarkeit einer Theorie abgeben kann. Vielleicht könnte sich der Ingenieur auch ganz gut mit einem vollständigen Aufbau der Approximations-Mathematik begnügen, wenn dieser Aufbau — nicht ganz erheblich viel schwieriger und umständlicher wäre als der übliche, der sich wesentlich auf die Begriffe der Präzisions-Mathematik stützt: es liegt eben so, daß die präzisen Begriffe der Mathematik (wie übrigens die aller Wissenschaften, die bereits zu Präzisierungen vorgedrungen sind) Vereinfachungen, Idealisierungen bedeuten, die wir bei der Begrenztheit unserer geistigen Fähigkeiten nicht missen können, die der Ingenieur erst recht nicht missen kann, der nur einen beschränkten Teil seiner Kraft und seiner Zeit mathematischen Studien widmen wird. Es ist ja selbstverständlich, daß wir uns beispielsweise mit einer approximativen Lösung einer Differentialgleichung begnügen, aber auf den präzisions-mathematischen Begriff des Differentialquotienten zu verzichten, würde eine außerordentliche Erschwerung und Verwicklung des ganzen Ansatzes und aller Methoden mit sich bringen. Andrerseits bleibt es für das Verständnis der Resultate sehr fruchtbar,

wenn man sich immer gegenwärtig hält, daß schon in den ersten Ansätzen weitgehende, zum Teil willkürliche Vereinfachungen stecken.

Ein anderes kennzeichnendes Merkmal der Ingenieurmathematik, das namentlich von jenen gern hervorgehoben wird, die ihr Studiengang durch die Zeichensäle einer technischen Hochschule geführt hat, bildet die Bevorzugung sogenannter graphischer Methoden vor den analytischen. Seit Culmann seine graphische Statik als ersten Stein in dem stolzen Zukunftsbau einer »graphischen Ingenieurwissenschaft« bezeichnet hat, ist soviel Wahres und Falsches zum Lobe dieser »Sprache des Ingenieurs« gesagt worden, daß die Vorbedingungen einer unbefangenen Erörterung geradezu getrübt erscheinen, zumal hier unwägbare Einflüsse der Erziehung, Gewöhnung und der traditionellen Kampfstellung zwischen Technikern und Mathematikern mitspielen. Sachlich zerfällt der Anwendungsbereich der graphischen Methoden offenbar in zwei verschiedene Teile, die nur selten ineinander übergreifen. Das eine Mal sind es, wie z. B. in der Statik, wesentlich elementar-geometrische Aufgaben, die eine zeichnerische Lösung mit den Konstruktions-Verfahren der Präzisions-Mathematik zulassen, das andere Mal handelt es sich, wie z. B. bei der zeichnerischen Integration, um graphisches Rechnen, bei dem die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Kurven den Ausgangspunkt und das Interpolieren einer Kurve aus wenigen Bestimmungsstücken das Hauptwerkzeug bildet. Beide Gebiete haben ihre naturgemäße Begrenzung. Es ist nicht einzusehen, wie man den Gedankenkreis der Graphostatik erweitern soll auf die Behandlung von Problemen, bei denen ganz andere Dinge als elementargeometrische Beziehungen in Frage stehen, z. B. in der höheren Elastizitätstheorie oder in der Lehre vom Erddruck, und tatsächlich sind hierhergehörige Versuche, auch wenn sie von anerkannten Meistern unternommen wurden, restlos gescheitert. Solche Erweiterungs-Bestrebungen sind auch nicht ohne Gefahr, da sie dazu verleiten, viel verwickeltere Beziehungen in die einfachen Formen zu pressen, die sich mit den üblichen Konstruktionsmitteln beherrschen lassen. Weit umfassender und eines Ausbaues fähiger sind zweifellos die Methoden des graphischen Rechnens, die all dem gerecht werden können, was die numerische Rechnung zu leisten imstande ist. Darin drückt sich die Weite und zugleich die Beschränkung dieses Werkzeuges aus; denn, um ein von Gauß herrührendes Bild zu gebrauchen, die numerische Ausrechnung stellt nur die bare Münze des Zahlungsverkehres dar, größere und weittragende Unternehmungen erfordern aber, wie man weiß, ganz anders geartete Einrichtungen, und diesen entsprechen eben die allgemeinen, grundsätzlichen Untersuchungen der Mathematik. Innerhalb des beschränkten Bereiches ihrer Anwendbarkeit wird niemand die Vorzüge zeichnerischer Verfahren, größere Uebersichtlichkeit, Anschaulichkeit, leichtere Ueberprüfungsmöglichkeit, leugnen (obwohl hier gewiß die Gewöhnung viel ausmacht), und es muß auch zugegeben werden, daß ihre Ausgestaltung in mancher Richtung möglich ist (s. weiter unten). Aber in den graphischen Verfahren ein wesentliches Kennzeichen aller Teile der mathematischen Ingenieurwissenschaft zu sehen, ist sicher verkehrt.

Wenn wir aus diesem, oft mit großer Heftigkeit geführten Widerstreit der Meinungen zu einer halbwegs geklärten Auffassung gelangen wollen, so müssen wir uns nur von jeder Engherzigkeit und Kleinlichkeit frei machen. Der Ingenieur, der es mit seiner Aufgabe ernst nimmt, wird jedes Werkzeug, das ihm die — von seinem Standpunkt — »reine« Mathematik liefert, zurichten und zur Bewältigung seiner Aufgaben benutzen. Besonderen Nachdruck müssen wir dabei auf das »Zurichten« legen. Denn daraus entspringen vielleicht die meisten Enttäuschungen und Mißverständnisse, daß der Ingenieur oft meint, er müsse alle theoretischen Hilfsmittel fertig und zum unmittelbaren Gebrauch bereit aus anderen Händen empfangen. Es ist so, wie wenn man verlangen wollte, ein Lehrbuch des Maschinenbaues müsse für alle irgendwie denkbaren Arbeitsmaschinen fertige Konstruktionszeichnungen bringen. In Wahrheit kann die Maschinenkunde nur lehren, wie aus einem bestimmten Verwendungszweck heraus die Maschine geformt werden muß, und in ganz gleicher Weise kann der Mathematiker unmöglich die für jedes praktische Einzelproblem passende Methode oder gar Endformel von vornherein bereitstellen. Nur die genaue Kenntnis des Zieles kann auf dem letzten Stück des Weges richtig leiten.

Wenn etwas für das Verfahren innerhalb der Ingenieur-Mathematik allgemein kennzeichnend sein soll, so kann es nur dies sein: hier wird ausgegangen von einer bestimmten praktischen Aufgabe, die gelöst werden muß, und alles das aus zum Teil sehr verschiedenen Gebieten der Theorie herangezogen und angepaßt,

was irgendwie brauchbar erscheint. Dagegen geht der reine Mathematiker — wenigstens vom Standpunkt der Anwendungen aus gesehen — von allgemeinen, mehr willkürlich gewählten oder nur durch den augenblicklichen Stand der Wissenschaft bestimmten Fragestellungen aus, die er mit einer gewissen »Reinheit der Methode« zu behandeln sucht (wobei er sich freilich in Rücksicht auf seine andere Stellung in der Kette aufeinanderfolgender Abstraktionsstufen doch nur analog dem Techniker verhält). J. M. Rankine, der erfolgreiche Begründer der technischen Physik, sagt einmal: »Die Frage für den Ingenieur ist: Was habe ich zu tun? Und er muß sich sofort entscheiden; die Frage für den Mathematiker lautet: Was soll ich denken? Und er kann sich unbegrenzt viel Zeit lassen.« Für den Mathematiker knüpfen sich an einen bestimmten gedanklichen oder methodischen Kern eine Fülle von Fragestellungen, beim Ingenieur sammeln sich um eine einzige praktische Frage herum Antworten oder auch nur Andeutungen von solchen aus allen möglichen Theorien. Vielleicht kann man am bezeichnendsten diese Verhältnisse in ferner Anlehnung an einen Ausspruch Machs so darstellen: Die wichtigste Theorie, die der Ingenieur beherrschen muß, ist die, eine unvollkommene oder unvollständige Theorie zu benutzen verstehen, solange es eine bessere nicht gibt.

Wir wollen im folgenden die Reihe der mathematischen Gebiete, die das Interesse des Ingenieurs berühren, flüchtig durchlaufen, und da und dort Fragen feststellen, deren Beantwortung oder nähere Untersuchung nach dem augenblicklichen Stand der Dinge erwünscht erscheint. Gelegentlich soll auch auf die Ergebnisse neuerer einschlägiger Arbeiten hingewiesen werden. Ein Teil der Problemgruppen wird später in den »Zusammenfassenden Berichten« unserer Zeitschrift noch genauer darzustellen sein.

3. Probleme aus der Analysis. Das Ausgangs- und Endproblem aller Analysis ist wohl dies: Mittel zu schaffen, um die Funktionswerte einer irgendwie (aber mathematisch, nicht physikalisch) definierten Funktion tatsächlich berechnen zu können. Von hier leiten sich ab und hierher münden ein alle Theorien, die die Untersuchung der Funktionen nach ihren verschiedenen Eigenschaften zum Gegenstand haben. Zwei Hauptfragen, die, jede für sich und beide in ihrer Zusammensetzung, in breitem Ausmaß Behandlung gefunden haben, lassen sich hervorheben. Die eine kann man als die Aufgabe der »Funktions-Umkehrung« oder in engerer Anlehnung an die übliche Ausdrucksweise als »Gleichungs Auflösung« bezeichnen: Gegeben ist eine explizite berechenbare Funktion einer Veränderlichen (oder n Funktionen von n Veränderlichen), man soll sie »umkehren«, d. h. jene Werte der Veränderlichen finden, für die die gegebene Funktion (bezw. die gegebenen Funktionen) vorgeschriebene Werte annimmt. Die zweite Hauptaufgabe besteht im »Aufbau« von Funktionen oder dem »reinen Integrationsproblem«: Gegeben sind Anfangswerte und Eigenschaften im Unendlichkleinen, man soll weiter entfernte Funktionswerte bestimmen. — Die für physikalische Fragen wichtigsten und zugleich schwierigsten Probleme sind die, bei denen sich beide Fragestellungen überkreuzen, etwa so, daß die durch »Aufbau« hergestellte Funktion erst noch umzukehren ist oder ähnlich (Randwertaufgaben usf.).

Sprechen wir zunächst vom Umkehrproblem, so ist hier nur der allereinfachste Fall der »algebraischen« Aufgabe, in dem es sich um eine rationale, ganze Funktion einer Veränderlichen handelt, als hinlänglich gelöst anzusehen. Man beherrscht die Frage der Auflösung einer Gleichung n-ten Grades, sowohl nach ihrer grundsätzlichen Seite als nach der rein praktischen der tatsächlichen Berechnung der Wurzeln[1]). Aber schon der Fall mehrerer Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten hat nicht die gleich eingehende, wünschenswerte Behandlung gefunden, die eine rasche Uebersicht über die Lage der Wurzeln und ihre nähere Bestimmung ermöglichen würde. Noch schlimmer steht es mit dem für viele technische Anwendungen sehr wichtigen, über die Algebra hinausgehenden Fall transzendenter Gleichungen (d. h. nicht rational-ganzer Funktionen, die umgekehrt werden sollen). Hier ist nur weniges Methodische bekannt[2]), Sonderfälle sind gelegentlich mit Erfolg behandelt worden[3]).

Ein altes und dringendes Desideratum des Technikers bildet ein wirklich brauchbares, vor allem übersichtliches und einprägsames Verfahren zur Auflösung eines Systems von zahlreichen linearen Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten. Was

[1]) Vgl. z. B. C. Runge, Praxis der Gleichungen, Leipzig 1900.

[2]) Bemerkenswert, aber nicht durchgreifend ist die Note von R. de Montessus, Comptes rendus de l'académie, 148, Paris 1909, S. 468 u. 1749. Vgl. a. Runge in Encykl. d. mathem. Wissensch. Bd. I S. 434 ff.

[3]) Vgl. z. B. H. Zimmermann, Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung, Leipzig 1906.

bisher an zeichnerischen und rechnerischen Methoden vorgeschlagen wurde[1]), genügt diesen Anforderungen nicht. Anzustreben wäre, daß das Verfahren in den Sonderfällen einfacher Gliederung des Gleichungssystems, die eine einfachere Auflösung gestatten, von selbst übergeht in die bekannten, in der Graphostastik usf. gebräuchlichen Konstruktionen.

Hier wären anzuschließen, als nicht mehr ganz in die erste Hauptgruppe von Problemen gehörig, die Aufgaben der Reihenentwicklung und sonstigen Darstellungen empirisch gegebener Funktionen in vorgeschriebenen Formen. Die Technik hat in neuerer Zeit die praktische Verwendbarkeit gewisser einfacher Entwicklungen (harmonische Analyse der durch Oszillographen aufgenommenen Schwingungen) erkannt, es fehlt aber hier noch viel an der Verbreitung einfacher, den Theoretikern längst geläufiger, grundsätzlicher Erkenntnisse, z. B. über die reichen Möglichkeiten der Approximation durch Polynome usf[2]).

In der zweiten Problemgruppe, der unmittelbaren Integration, sind in den letzten Jahrzehnten viele fruchtbare Vorarbeiten geleistet worden. Bei manchen praktischen Aufgaben ist man wirklich bis zu völlig befriedigenden Lösungen vorgedrungen, vielleicht darf hier als ein, freilich besonders gut liegendes, Beispiel das ballistische Problem genannt werden[3]). Für umfassendere Untersuchungen wird man wohl in Zukunft auch die von Poincaré begründete »Geometrie der Differentialgleichungen«[4]) heranzuziehen haben. Daß hier in vielen Fällen gerade das zeichnerische Verfahren vor dem ihm grundsätzlich gleichwertigen rechnerischen den Vorzug verdient, ist schon oben erwähnt worden. Aber, ob Rechnung oder Zeichnung, das ganze Gebiet steckt noch, trotz seines beträchtlichen Alters — denn der Ursprung der meisten Verfahren geht in die Zeit vor Erfindung der Infinitesimalrechnung zurück — in den Anfängen seiner Bearbeitung. Die Hauptursache scheint darin zu liegen, daß die mathematische Theorie noch nicht den richtigen Standpunkt zu dieser Art von Fragestellungen gefunden hat. Man tut immer so, als wäre ein »praktisches« Integrationsverfahren etwas dem Wesen nach verschiedenes von einem »analytischen«, etwa in dem Sinne, daß das letztere eine allgemeine Lösung, das erstere nur eine Lösung bei gegebenen speziellen Zahlenwerten oder dergleichen liefert. Demgegenüber kann nicht genug betont werden (und ganz das gleiche ist hinsichtlich der numerischen Gleichungsauflösung zu sagen): ein Verfahren, das gestattet, von beliebig angenommenen Daten aus dem gesuchten Resultat beliebig nahe zu kommen (Konvergenz!), ist völlig »allgemein« und unterscheidet sich höchstens in der äußeren Form seiner Wiedergabe bezw. seiner Definition von einer analytischen Formel. Wenn erst diese Anschauung, die den älteren Mathematikern wie Euler oder Cauchy sicher noch geläufig war, wieder in das Allgemein-Bewußtsein der Mathematiker übergangen sein wird, wird man eine reichere Förderung dieses Zweiges der praktischen Mathematik erwarten dürfen.

Die Schwierigkeiten des gemischten Problems, das sich aus Funktions-Aufbau und Funktions-Umkehrung zusammensetzt, sind so bedeutende, daß man hier über die ersten tastenden Versuche kaum hinausgekommen ist, ja daß über die Fragestellung selbst keinerlei Klarheit herrscht. Meist verbirgt sich der Unterschied zwischen »Randwert«- und »Anfangswertproblemen« hinter dem viel unwesentlicheren zwischen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. In den seltenen Fällen, in denen man es bei partiellen Gleichungen mit der reinen Integrationsaufgabe zu tun hat, sind fast die gleichen Methoden wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen anwendbar. Das Randwertproblem hingegen führt, wenn es numerisch behandelt wird, auf dem Wege über die Differenzenrechnung auf die Auflösung eines sehr vielgliedrigen Systems meist linearer Gleichungen; in dieser Weise sind gelegentlich praktische Aufgaben durchgeführt worden[5]). Wenn man aber, wie es oft durch die Natur der Aufgabe unmittelbar nahegelegt wird, zur Ausnutzung elementar-geometrischer Beziehungen den Weg zeichnerischer Behandlung einschlägt, so ist eine wesentliche Erweiterung und Vertiefung der bei eindimensionalen Problemen verwendeten Begriffe und Verfahren notwendig; nennenswerte Versuche in dieser Richtung sind für verschiedene Aufgaben der Elastizitätslehre

---

[1]) Vgl. etwa R. Mehmke, Graphisches Rechnen, Leipzig 1917.

[2]) Eine für die Anwendungen sehr brauchbare Darstellung enthält das Lehrbuch von C. Runge Theorie und Praxis der Reihen, Leipzig 1904.

[3]) Vgl. z. B. C. Cranz und R. Rothe, Artillerist. Monatshefte 1917, S. 198 bis 238.

[4]) Vgl. den Bericht von H. Liebmann in Encykl. d. mathem. Wiss. III. Bd., Art. D 8.

[5]) Z. B. eine Torsionsaufgabe von C. Runge, Zeitschr. Math. Phys. 56 (1908) S. 225 bis 232. Vgl. a. die demnächst in dieser Zeitschr. erscheinende Arbeit von Hencky.

und der Hydromechanik unternommen worden[1]). Aber es fehlt noch jeder Ansatz zu einer Systematik, jeder Ueberblick über die möglichen Ausgestaltungen, jede Einsicht in die Reichweite des Verfahrens. Die bisher einzige lehrbuchmäßige Darstellung des Gebietes durch Massau[2]) ist in jeder Richtung unzulänglich.

Ein für die Anwendungen sehr fruchtbarer Gedanke, der von theoretischer Seite (zur Führung sogen. Existenzbeweise) beigebracht wurde, ist der der »sukzessiven Approximationen« oder der »Näherungsfolgen«. Er besteht darin, daß von einer in weiten Grenzen willkürlichen Funktion als erster Näherung ausgegangen und diese dann durch wiederholtes Einsetzen in die gegebenen Gleichungen fortschreitend verbessert wird. Anscheinend ganz unabhängig von der theoretischen Begründung hat L. Vianello diesen Gedanken in Gestalt eines zeichnerischen Verfahrens zur Lösung von Stabilitätsaufgaben der Elastizitätslehre (Knickung, kritische Drehgeschwindigkeit usw.) in die Technik eingeführt[3]). Nicht nur die eigentlichen Randwertprobleme sind in dieser Weise lösbar, sondern auch das Problem der »Eigenwert«-Bestimmung (das sind eben die »kritischen« Werte der Belastung, Geschwindigkeit usw.) und die in Form sogen. Integralgleichungen gefaßten Aufgaben lassen in vielen Fällen mit Vorteil eine Behandlung im Sinne der »Näherungsfolgen« zu. Es ist bemerkenswert, daß in neuerer Zeit dieser Grundgedanke auch für die Probleme der beiden früher angeführten Hauptgruppen, vor allem für die reine Integrationsaufgabe, aber auch für die Auflösung endlicher Gleichungssysteme mehr und mehr Geltung gewinnt. Vielleicht liegt hier auch der Weg, auf dem man einmal zu einer allgemeinen, den oben ausgesprochenen Forderungen genügenden Methode der praktischen Behandlung linearer Gleichungen mit sehr vielen Unbekannten gelangen wird.

Es sei noch erwähnt, daß man die Zurückführung eines Randwertproblems auf die Auflösung eines algebraischen Gleichungssystems statt auf dem unmittelbar sich darbietenden Weg der Differenzenrechnung (Einführung endlicher Differenzen an Stelle der Differentiale) auch auf zwei andere Weisen bewirken kann. Die eine besteht darin, daß man zuerst zu einer sogen. Integralgleichung übergeht, bei der die gesuchte Funktion unter dem Integralzeichen eines bestimmten Integrals steht, und dann dieses Integral durch eine endliche Summe annähert. Das andere Verfahren benutzt die Möglichkeit, die Aufsuchung der unbekannten Funktion auf die Form eines Variationsproblems zu bringen, das dann in analoger Weise in eine gewöhnliche Maximum-Minimum-Aufgabe übergeführt wird. Dieser Gedanke hat sich unter dem Namen der Ritzschen Methode schnell Eingang, auch in die Technik, verschafft, und es sind mannigfache Aufgaben auf seiner Grundlage behandelt worden. Naturgemäß haben beide Verfahren nicht denselben Umfang der Anwendbarkeit wie das grundsätzlich immer anwendbare Verfahren der endlichen Differenzen.

All diese Fragen mögen anscheinend weitab von dem Arbeitsgebiet und dem Aufgabenkreis des Ingenieurs liegen. Aber was nutzt alle Theorie der Mechanik und der Physik, wenn man nicht die Werkzeuge besitzt oder zu bereiten versteht, um im gegebenen Fall die zahlenmäßigen Folgerungen aus ihr zu ziehen?

4. Geometrische Fragen. Die Pflege der Geometrie, die schon im klassischen Altertum zu großen Erfolgen geführt hatte, ist ursprünglich wohl durch die Aufgaben des Feldmessens angeregt worden. Als Grundproblem kann man vielleicht die »Konstruktionsaufgabe« ansehen: ein Raumgebilde, das durch hinreichend viel Eigenschaften definiert ist, vollständig herzustellen. Allmählich ist diese etwas einseitige Auffassung mehr und mehr zurückgetreten gegenüber einer »systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander«. Im Gegensatz zur Analysis besitzt die Geometrie, und zwar erst seit neuerer Zeit, ein durchgreifendes Einteilungsprinzip: es bilden nach F. Klein immer jene Eigenschaften der Raumgebilde, die gegenüber einer bestimmten »Gruppe« von Transformationen unverändert bleiben, ein geschlossenes Untersuchungsgebiet, eine »Geometrie« für sich. So kann man heute insbesondere die metrische und die projektive Geometrie sowie die Analysis situs einander gegenüberstellen. Bei der ersten bilden die Bewegungen oder »kongruenten Transformationen« die maßgebende Gruppe,

[1]) Für die Potentialgleichung: C. Runge, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen math. phys. Kl. 1911, S. 431 bis 448. Für Strömungsprobleme, namentlich in der Turbinentheorie: R. v. Mises, Zeitschr. Math. Phys. 57 (1909), S. 1 bis 120, oder Theorie der Wasserräder, Leipzig 1908.

[2]) Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux derivées partielles, Gand 1900 bis 1903. Zur Einführung weit besser ist der Artikel von Runge und Willers in der Encyklopädie d. mathem Wiss. Bd. II, C 2. Vgl. a. A. Willers, Graphische Integration, Sammlung Göschen, Leipzig 1920.

[3]) Zeitschr. Ver. deutsch. Ingen. 1898, S. 1436.

bei der zweiten die Umwandlungen durch geradliniges Projizieren von einem Festpunkt aus, bei der dritten, von deren Bedeutung für die Anwendungen noch die Rede sein wird, alle Transformationen, die in bestimmtem Sinne stetig erfolgen.

Herkömmlicherweise werden zwei Gebiete der Geometrie zur angewandten Mathematik gerechnet, die sogen. »praktische Geometrie« oder Geodäsie (Feldmeßkunst) und die darstellende Geometrie, die etwa in der Lehre von der Kartenprojektion einen Berührungspunkt aufweisen. In der Geodäsie handelt es sich um metrische Aufgaben, und zwar zunächst um elementare, d. h. solche, die auf den einfachen Kongruenzsätzen für endlich ausgedehnte Figuren beruhen, dann erst, sobald auf die Krümmung der Erdoberfläche und insbesondere auf deren Abweichung von der Kugelgestalt Rücksicht genommen wird, um Fragen der Differentialgeometrie. Die Geschlossenheit dieses Problemkreises und die äußeren Verhältnisse der praktischen Anwendung haben die Geodäsie zu einem selbständigen Wissenschafts- und Berufszweig werden lassen, dessen Entwicklung ziemlich unabhängig von der der übrigen Teile der angewandten Mathematik verläuft. Eine solche Isolierung wirkt auf die Dauer niemals vorteilhaft.

Die darstellende Geometrie ist, was ihre systematische Ausbildung angeht, eng verknüpft mit der Geschichte der technischen Hochschulen, ja man kann ihre Entwicklung geradezu als ein Symbol für diese ansehen. Hervorgegangen aus einer Sammlung praktischer Regeln, die, zum Teil unter strenger Geheimhaltung nach außen, innerhalb enger Berufsgruppen (der »Bauhütten«) von Generation zu Generation überliefert wurden, hat sie durch Monge, einer der Begründer der école polytechnique in Paris, die feste Form eines wissenschaftlichen Lehrgebäudes erhalten, dessen Pflege den verschiedenen, später entstandenen Hochschulen überlassen blieb. Auf die Anfänge der projektiven Geometrie, die auf Poncelet, einen Mitarbeiter Monges, zurückgehen, hat die darstellende befruchtend eingewirkt. In der ersten Blütezeit der deutschen technischen Hochschulen, in den 70- und 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts, in denen der Grund zu den meisten der heutigen theoretischen »Ingenieurwissenschaften« gelegt wurde, hat die darstellende Geometrie in der »Methodenlehre« Fiedlers in Zürich ein übergroßes Maß von projektiver Geometrie in sich hineingezogen und ist durch diese allzu theoretische Fassung ihren ursprünglichen Zielen stark entfremdet worden. Die Reaktion, die darauf eingesetzt hat und teils in einem Zurückdrängen der geometrischen Grundgedanken der Fragestellung, teils in fortschreitender Einschränkung des lehrplanmäßigen Unterrichts auf diesem Gebiet besteht, wirkt heute noch fort, nachdem sie bereits weit übers Ziel geschossen hat. Denn wenn auch die unmittelbaren Aufgaben der zeichnerischen Darstellung eine weitgehende theoretische Ausbildung in der darstellenden Geometrie nicht rechtfertigen können, sie bleibt doch ein unentbehrliches Mittel der Schulung für den Bauingenieur, der dreidimensionale Baukonstruktionen, z. B. räumliche Fachwerke, wirklich beherrschen, für den Maschineningenieur, der räumliche Bewegungsvorgänge, wie sie bei windschiefen Verzahnungen, beim Hinterschleifen von Fräsern usw. auftreten, richtig verstehen will. So kann man denn nur hoffen, daß die jetzt einsetzende Neubelebung des Interesses an den wissenschaftlichen Grundlagen der Technik auch dem geometrischen Unterricht allmählich zu seinem Recht verhelfen wird.

Dann aber wird die »angewandte« Geometrie aus der Enge hervortreten müssen, die ihr heute vielfach anhaftet, um sich vor allem nach zwei Richtungen zu entfalten. Einmal bedürfen die der Präzisionsmathematik zuzuzählenden geometrischen Grundbegriffe der Mechanik, der Vektor und Tensor, die Dyade, der Stab und die Dyname, Rotor, Gradient usw., Begriffe, die gerade in der technischen Mechanik zur umfassendsten Anwendung gelangen, der anschaulichen und durchgreifenden Verknüpfung mit dem Mutterboden der Geometrie, dem sie entstammen. Wie Wertvolles es hier auf dem nur scheinbar ausgeschöpften und vielfach als »nur formal« unterschätzten Gebiete noch zu finden gibt, haben neben dem großen Werk von Study[1]) die in ihrer Einfachheit bestechenden, schönen Arbeiten von Otto Mohr[2]) gezeigt; durch beide werden die besten klassischen Ueberlieferungen eines Möbius, eines Chasles, aufs würdigste fortgesetzt. Von einer Ausgestaltung und Zusammenfassung all dieser Lehren darf sich insbesondere die Mechanik der Baukonstruktionen, die ja so stark geometrisch durchsetzt ist, viel versprechen. Freilich scheint es, als ob die hier erforderlichen Begabungen geometrisch anschaulicher Richtung, selbst innerhalb des Kreises der mathematisch Veranlagten, besonders selten zu finden wären.

[1]) E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903.

[2]) O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin 1914.

Der zweite Punkt, auf den wir die geometrische Betrachtungsweise ausgedehnt zu sehen wünschen, fällt in das Gebiet der Approximations-Mathematik im Kleinschen Sinne. Es handelt sich um eine geordnete Entwicklung der Grundsätze und der Hilfsmittel des graphischen Rechnens, von dem oben ausführlich die Rede war. Bekanntlich hat d'Ocagne vor nicht langer Zeit durch Schaffung der Nomographie hier sehr wesentliche Fortschritte herbeigeführt[1]). Man ist jetzt in der Lage, funktionale Zusammenhänge zwischen mehr als zwei Veränderlichen durch ebene Figuren zu beherrschen. Allein fast alle prinzipiellen Fragen der Nomographie harren noch der Lösung, und man wird nicht fehlgehen, wenn man von deren Klärung auch eine Erweiterung der Anwendungsgebiete erwartet. In letzter Linie liegen hier »Abbildungs«-Probleme vor, die man ja einer genügend weit gefaßten »darstellenden« Geometrie unterordnen könnte; auch andere Aufgaben der zeichnerischen Rechenverfahren, z. B. die der Konstruierbarkeit unter Zuhilfenahme einer festen Kurve (analog den Steinerschen Konstruktionen mit festem Kreis), dann die schon berührten infinitesimal-geometrischen Fragen bei der Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen, weisen mehr als nur äußerliche Berührungspunkte mit den Begriffsbildungen und Verfahren einer allgemeinen »Abbildungs«-Geometrie auf.

Vorhin ist auch ganz kurz der »Analysis situs« Erwähnung getan worden, jener Geometrie, die die Raumgebilde nur nach ganz allgemeinen Zusammenhangs-Eigenschaften unterscheidet: Für sie sind Kugel und Ring verschiedene Körper, aber der Kugel gleichgestellt wird jeder Körper, der, wie ein Würfel oder sonst ein einfaches Polyeder, durch einen einfachen Schnitt (d. h. einen in geschlossener Linie um die Oberfläche herumlaufenden) in zwei getrennte Teile zerfällt. Es sieht so aus und hat bisher als selbstverständlich gegolten, daß eine derartige Betrachtungsweise, die zumeist auf sehr schwierige Fragestellungen führt, für die Technik ohne jede Bedeutung sei (wenigstens soweit von den mittelbaren Anwendungen in der Funktionentheorie abgesehen wird). Demgegenüber sei gestattet, darauf hinzuweisen, daß in einem bestimmten Zweig der Technologie, der freilich gegenwärtig noch rein handwerksmäßig auf Grund überlieferter Erfahrungsregeln betrieben wird, eine ähnliche, wenn auch nicht die gleiche, Art der Auffassung geometrischer Körper zur Geltung kommt. Wir meinen die Gießerei, bezw. das Herstellen von Modellen und von Negativformen vorgegebener Gebilde. Hier ist die Aufgabe zu lösen: wie muß der herzustellende Körper in möglichst wenig Teile zerlegt werden, von denen jeder einzelne »abformbar« ist, d. h. bei Einführen in die Formmasse und Wiederherausziehen den Negativabdruck des ganzen von ihm repräsentierten Oberflächenteils des ursprünglichen Körpers hinterläßt. Beispielsweise ist es klar, daß, wie eine Kugel, jeder einfache konvexe Körper eine Zerlegung in zwei Teile zuläßt, ebenso aber auch der durch Rotation einer Kugel entstandene Ring (Torus). Dagegen erfordert eine offene Kugelschale, die mehr als die Hälfte der Vollkugel umfaßt, mindestens vier Modellteile, nämlich je zwei für die Außen- und Innenfläche. Es kommt hier, wie man erkennt, durchaus nicht der gleiche Gesichtspunkt zur Geltung, der die Zusammenhangs-Eigenschaften der Analysis situs liefert, aber ein Einteilungsgrund, der ebenfalls in sehr weitem Maße stetige Gestaltsänderungen der Körper unberücksichtigt läßt. Wir führen dies mit allem nötigen Vorbehalt an, nur um zu zeigen, wie weit die Möglichkeiten wissenschaftlicher Durchdringung praktischer Handhabungen noch sind; an einen augenblicklichen und unmittelbaren Nutzen darf man da freilich nicht denken.

5. Der Aufgabenkreis der Mechanik. Die Mechanik mit all ihren Verzweigungen nimmt einen so breiten Raum in dem Arbeitsgebiet des Ingenieurs ein, daß es kaum möglich erscheint, auch nur die wichtigsten, gegenwärtig aktuellen Fragen hier zu berühren. In drei Stufen erhebt sich bekanntlich das Lehrgebäude der heutigen wissenschaftlichen Mechanik. Den Grund bildet die Newtonsche Mechanik der freien Punkte (oder kleinen festen Körper), die unmittelbar eingeprägten Kräften unterliegen; sie hat hauptsächlich in der Astronomie ihr Anwendungsgebiet gefunden und hier fast die größten Triumphe gefeiert, die je einer Naturwissenschaft zuteil wurden. Aber schon die Bewegungserscheinungen am physischen Pendel bedurften weiterer, über die Newtonschen hinausgehender Begriffsbildungen, die, von Huyghens vorbereitet, durch Euler und Lagrange ihre systematische Ausgestaltung erhalten haben: In der Mechanik der gebundenen Punktsysteme einschließlich der starren Körper (Mechanik endlich vieler Freiheitsgrade) ist es der Begriff der Bewegungsbeschränkung (kinematische Bedingung) und der mittel-

[1]) M. d'Ocagne, Traité de Nomographie, Paris 1899. Eine kurze Einführung gibt F. Schilling, Ueber die Nomographie von d'Ocagne, Leipzig 1900.

baren oder Reaktionskraft, der die Hauptrolle spielt[1]). Fast die gesamte Lehre von den Maschinen, von ihren Bewegungen und den in ihnen wirksamen Kräften, ruht auf diesem Fundament. Endlich hat Cauchy, gestützt auf mehrere Vorgänger, einen dritten Kraftbegriff, den der flächenhaft verteilten, inneren Kräfte oder Spannungen eingeführt, der es ermöglicht, die meisten Erscheinungen an stetig deformierbaren, festen, flüssigen oder luftförmigen Körpern bis zu einem gewissen Grade zu beherrschen. Ob damit der prinzipielle Aufbau der Mechanik abgeschlossen ist, muß angesichts des weiter unten noch zur Sprache kommenden, bisherigen Versagens der Hydromechanik gegenüber ganz geläufigen Bewegungsvorgängen zum mindesten als zweifelhaft gelten.

In den engsten Rahmen der Newtonschen Mechanik fällt von Aufgaben, die den Techniker angehen, eigentlich nur das sogen. »äußere« ballistische Problem. Es ist viel behandelt worden und gibt, wie schon erwähnt, reichlich Gelegenheit zur Anwendung praktischer Integrationsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen[2]). Bei der Vielfältigkeit der Anforderungen wird hier voraussichtlich noch lange nicht das letzte Wort gesprochen sein.

Der Untersuchung der Bewegungsvorgänge an Maschinen ist, wenn man etwa die Entwicklung der Statik der Bauwerke zum Vergleich heranzieht, verhältnismäßig wenig Aufmerksamkeit gewidmet worden. Breiteren Raum innerhalb der technischen Literatur hat eine Zeitlang nur die kinematische Betrachtungsweise der Reuleauxschen Schule eingenommen, die aber, trotz ihrer unbestreitbar aufklärenden Wirkung, sich bald infolge der einseitigen Ausschaltung der eigentlichen Kinetik als unfruchtbar erweisen mußte. Es ist erstaunlich, daß seit Poncelet (1845) und Grashof (1875/90) kaum eine nennenswerte Gesamtdarstellung der Maschinenlehre erschienen ist; hervorhebenswerte Behandlung von Einzelproblemen verdankt man J. v. Radinger für die Schwungradberechnung[3]), A. Stodola für die Theorie der Regulatoren[4]), H. Lorenz für den Massenausgleich[5]). Dabei liegt das methodische Rüstzeug für diese Untersuchungen seit mehr als hundert Jahren in der Lagrangeschen Systemmechanik fertig vor, deren Tag noch immer nicht gekommen zu sein scheint, obgleich K. Heun seit Jahrzehnten nachdrücklich auf sie hinweist[6]). Wenigstens bemühen sich stets wieder Techniker mit systematisch-theoretischen Bedürfnissen, wie beispielsweise Mohr, um die Schaffung von Begriffen, mit denen sie in den Anfangselementen der Lagrangeschen Mechanik stecken bleiben. Es wäre nun dringend zu wünschen, daß allmählich der Bann gebrochen wird und jene Methoden für die Lösung der maschinentechnischen Probleme herangezogen würden; davon wird man nicht nur Erfolg in Einzelfällen, z. B. bei einer zusammenfassenden Behandlung aller Aufgaben über die Regelung des Maschinenganges, erwarten dürfen, sondern es wird zweifellos neues Licht auf die Grundfragen der Maschinenlehre, auch auf die durch Reuleaux erst nur angebahnte Systematik, fallen. In mathematischer Hinsicht kommt hier nur das »reine« Integrationsproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen in Frage, zudem meist für lineare oder sonstwie spezialisierte Gleichungen; Schwierigkeiten physikalischer Natur, d. h. etwa Unstimmigkeiten zwischen dem Ansatz und dem tatsächlich Beobachteten, liegen in erheblichem Maße jedenfalls nicht vor.

Der allgemeine Spannungsbegriff, der von Euler vorbereitet, von Cauchy dann endgültig präzisiert wurde, hat seinen Ursprung und bisher auch die umfassendste Verwendung in der Theorie der elastischen Körper gefunden, die bekanntlich dadurch gekennzeichnet sind, daß Spannungen und Deformationen in jedem Punkt einander wechselweise eindeutig bestimmen. Nimmt man, wie dies allgemein üblich und hinreichend genau ist, diesen Zusammenhang als linearen an, so führt die Theorie für die einfachen Körperformen und Belastungsfälle, mit denen der Ingenieur gewöhnlich zu rechnen hat, zu Ergebnissen, die sich bei einiger Beherrschung der zeichnerischen und rechnerischen Näherungsverfahren in fast allen Fällen mit jedenfalls ausreichender Genauigkeit ableiten

---

[1]) Vergl. hierzu die in diesem Punkte vorbildliche Darstellung bei G. Hamel, Elementare Mechanik, Leipzig 1912, S. 87 ff.

[2]) Reiches Material bei C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik, Leipzig 1910. Vergl. auch Fußnote 2) S. 6, sowie die demnächst in dieser Zeitschrift erscheinende Arbeit von K. Popoff.

[3]) Ueber Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit, Wien 1892.

[4]) Schweizer Bauzeitung 22 (1893) S. 113 und 23 (1894) S. 108.

[5]) H. Lorenz, Dynamik der Kurbelgetriebe, Leipzig 1901.

[6]) Z. B. in dem grundlegenden Bericht: Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik Leipzig 1900. Eine ausführlichere Darstellung des ganzen Problemkreises der Maschinenlehre gibt R. v. Mises in Bd. IV der Encykl. d. mathem Wissensch., Artikel 10, S. 153 bis 355.

lassen[1]). Nur der dauernde Zustand gegenseitigen Mißverstehens zwischen Mathematikern und Technikern hat zur Folge gehabt, daß sich eine zum großen Teile mit der Elastizitätstheorie in Widerspruch stehende »technische Mechanik« ausgebildet hat, die den richtigen Ausgangspunkt durch angebliche »Näherungstheorien« ersetzt, wobei deren Begründung oft nur darin besteht, daß sie einfache Schlußfolgerungen, wenn auch ersichtlich falsche, gestatten. Damit soll nicht die »Baumechanik« im engeren Sinne getroffen werden, die besser Mechanik der Stabsysteme hieße, und aus wesentlich geometrischen Ausführungen um einen engen Kern richtiger mechanischer Vorstellungen besteht. Aber überall, wo es sich um etwas anderes als dünne Stäbe handelt, liegt ein weites, auf lange Zeit hinaus ergiebiges Arbeitsfeld der angewandten Mathematik vor: für die einzelnen Problemgruppen, wie z. B. die Schubspannungs-Verteilung beim gedrillten oder gebogenen Balken, das Gleichgewicht der belasteten ebenen Platte oder krummen Schale, die Stabilität verschieden beanspruchter Stäbe oder Schalen, die Spannungen und Formänderungen ebener Scheiben bei beliebigem Kraftangriff (Kerbwirkung) usw., die erforderlichen Rechnungen nun wirklich in dem praktisch notwendigen Umfang durchzuführen, so daß die Fragen, die in der technischen Mechanik gestellt und beantwortet zu werden pflegen, auch ihre rationelle Beantwortung tatsächlich erhalten. — Als rationell glauben wir hierbei ein Verfahren bezeichnen zu dürfen, das von einem, soweit die Beobachtung reicht, physikalisch richtigen Ansatz ausgeht und Schlußfolgerungen durch Näherungsrechnung von kontrollierbarem Genauigkeitsgrad zu gewinnen sucht.

Hier erhebt sich nun freilich der Einwand, daß die wirklichen Körper teils überhaupt nicht, teils nur in engen Belastungsgrenzen sich wie elastische verhalten. Den vor einigen Jahrzehnten unternommenen Versuch, den Abweichungen dadurch Rechnung zu tragen, daß man an Stelle des Hookeschen linearen ein nicht-lineares Spannungs-Zerrungs-Gesetz einführt[2]), kann man wohl als erledigt ansehen. Denn die eigentlichen Schwierigkeiten bestehen erst darin, daß Spannungen und Formänderungen nicht mehr in eindeutiger Wechselbeziehung stehen, sondern daß nach Verschwinden der Beanspruchung bleibende, plastische Formänderungen auftreten. Die allgemeine Theorie plastischer Körper, die schon auf Saint-Venant zurückgeht und in den anschaulichen Formulierungen Mohrs neue Förderung erhalten hat[3]), ist erst in neuester Zeit durch L. Prandtl bis zur expliziten Verwertung für bestimmte Aufgaben fortgeführt worden[4]). Der Wirklichkeit gegenüber bleibt aber auch die Theorie der plastischen Formänderungen noch ein gutes Stück zurück, da sie der »Verfestigung« des Materials durch die Beanspruchung, also einer gewissen »Gedächtnis-Erscheinung«, nicht Rechnung trägt. Diese wird man erst im Zusammenhang mit der elastischen Nachwirkung und den allgemeineren Ansätzen Volterras zu einer »Gedächtnis-Mechanik«[5]) beherrschen können; eine genügend umfassende Theorie, die sich heute, wenigstens in allgemeinem Rahmen, wohl schon aufstellen ließe, ist bisher nicht formuliert worden. Ueberhaupt darf bemerkt werden, daß die reichen Möglichkeiten, die verschiedenartige Festsetzungen über die inneren Spannungen als Funktion anderer Größen in der Mechanik der Kontinua, insbesondere der festen Körper, darbieten, bisher nur sehr wenig ausgenutzt wurden. Außer den plastischen und den gewöhnlichen elastischen Körpern sind in größerem Umfang nur noch gewisse elastische Gebilde mit endlich ausgedehnten Formänderungen, durch Cosserat u. a. behandelt worden[6]). Einstweilen ist hier die Sammlung von Beobachtungsmaterial, da sich die heutige Physik wenig um dergleichen kümmert, die wichtigste Aufgabe der an der Weiterentwicklung der Mechanik arbeitenden Techniker.

Ganz anders als in der Elastizitätslehre steht es in dem andern klassischen Gebiet der Mechanik stetig verteilter Massen, der Hydrodynamik. Hier verfügt man noch nicht über einen Ansatz, der auch nur in den wichtigsten und scheinbar einfachsten Fällen, wie z. B. dem der gleichförmigen Strömung des Wassers in einem geraden Rohr, zu Folge-

---

[1]) Vergl. hierzu z. B. den demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden Bericht über die Lösungen des Torsionsproblems von Th. Pöschl.

[2]) Namentlich C. Bach, Elastizität und Festigkeit, Berlin 1890; 8. Aufl. Berlin 1920.

[3]) S. 192 bis 235 in den Fußn. 2, S. 8, genannten Abhandlungen Mohrs. Für den allgemeinen Ansatz und seine Begründung vergl auch R. v. Mises, Nachr. Ges. Wissensch. Göttingen, math. phys. Kl. 1913, S. 582. Zusammenfassendes Referat in der Encykl. d. math. Wissensch. Bd. IV, Art. 31, von v. Karman und L. Föppl.

[4]) Vergl. den folgenden Aufsatz sowie Nachr. Ges. Wissensch. Göttingen, math. phys. Kl. 1920 S. 74.

[5]) Vergl den Bericht von Volterra im Arch. d. Math u. Phys. (3) 22 (1914) S. 155 bis 182.

[6]) E. und F. Cosserat, Théorie des corps déformables, Paris 1909.

rungen führte, die mit der Beobachtung in erträglichem Maße übereinstimmen. Man besitzt bekanntlich zwei Theorien, die der »idealen« und die der »zähen« Flüssigkeiten, und für jede von ihnen gibt es Gebiete, in denen sie unbestritten zur Geltung kommt; die Idealtheorie beispielsweise bei der Berechnung der freien Strahlen (vena contracta), die Zähigkeitstheorie bei der geordneten, laminaren Bewegung in engen Kanälen, in den schmalen, vom Schmiermittel erfüllten Spalten zwischen Welle und Lager usw. Auf beiden Gebieten liegen, noch wenig bearbeitete, Aufgaben der Approximations-Mathematik, ähnlich denen der Elastizitätstheorie vor. Von den meisten übrigen Bewegungen weiß man nur, daß sie »turbulent« sind, d. h aus einer verhältnismäßig ruhigen Grundströmung und darüber gelagerten, sehr unregelmäßigen Vibrationen bestehen, und man kann nur mit Verwunderung feststellen, daß die Grundströmung im großen ganzen den Bewegungsgesetzen der idealen Flüssigkeiten folgt[1]). Ein neues Beispiel für die oft sehr weitgehende Uebereinstimmung hat die in letzter Zeit weit ausgebildete Theorie der Luftströmung in der Umgebung eines bewegten Tragflügels geliefert[2]). Aber weder kann man aus den mechanischen Gleichungen den Grund dafür ableiten, daß bei Außerachtlassen der Pulsationen das Verhalten der wirklichen Flüssigkeit annähernd das einer reibungsfreien wird, noch viel weniger lassen sich die Fragen beantworten, die mit dem Auftreten der Turbulenz unmittelbar zusammenhängen, vor allem die, welchen Umständen das Entstehen der Turbulenz zuzuschreiben ist[3]). Nach dem gegenwärtigen Stand der Theorie muß man es als noch unentschieden ansehen, ob der Ansatz der zähen Flüssigkeiten bei genügender mathematischer Durchdringung eine Erklärung der Turbulenz zu geben vermag, etwa auf dem Wege einer entsprechenden Berücksichtigung der Wandrauheit als Grenzbedingung, oder ob die Lösung nur durch die Sprengung des Rahmens der klassischen Mechanik und Uebergang zu statistischer Betrachtungsweise erhofft werden kann. Bei den großartigen und vielfach verblüffenden Erfolgen, die der physikalischen Statistik in den letzten Jahren zuteil geworden sind, wird man vielleicht mehr der letzteren Ansicht zuneigen, die — wenn sie sich bewahrheiten sollte — von gar nicht abzuschätzender, grundsätzlicher Bedeutung für die gesamte Auffassung der Mechanik werden könnte.

So haben wir in flüchtigem Zuge den mannigfaltigen Aufgabenkreis der Wissenschaft durcheilt, die mehr als irgend eine andere eine unentbehrliche Grundlage der schaffenden Technik bildet. Die Mechanik, die einmal Lionardo das Paradies der Mathematiker genannt hat, ist für den heutigen Ingenieur das umfassendste Arbeitsfeld geworden, dessen mühevolle Bebauung ihm fast allein überlassen blieb und aus dem er, wenn auch in harter Arbeit, reichlich lohnende Früchte zieht.

6. Weitere Probleme. Schlußbemerkung. Mit den vorstehenden Betrachtungen über die Aufgaben der angewandten Analysis und Geometrie sowie der Mechanik ist die Fülle der Probleme bei weitem nicht erschöpft, mit deren Bearbeitung wir uns zu befassen haben. Die angeführten Problemgruppen sind nur insofern ausgezeichnet, als sie bei der nach der Berufsgliederung orientierten Stoffabgrenzung der verschiedenen Zeitschriften an keiner andern Stelle ihre zuständige Vertretung finden. Nun tritt aber noch eine ganze Reihe von Gebieten hinzu, die bei der heutigen Spezialisierung nicht mehr in vollem Umfang bei uns behandelt werden können, die aber dem hier vertretenen Interessenkreis so nahestehen, daß sie nicht ganz unberücksichtigt bleiben dürfen.

An erster Stelle sei die mathematische Statistik genannt, die mit ihren Ausstrahlungen nach der Bevölkerungslehre und Versicherungs-Wissenschaft auf der einen, nach der physikalischen Statistik auf der andern Seite, heute nicht nur großen Umfang, sondern hohe und immer noch steigende, wissenschaftliche und praktische Bedeutung gewonnen hat. Es scheint, daß hier eine Klärung der Grundlagen, der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und auch ein Ausbau der Lösungsmethoden für Einzelprobleme vonnöten wäre. Beide Mängel traten z B. in letzter Zeit zutage bei der langwierigen, nicht ganz befriedigend abgeschlossenen Erörterung über das Problem der »Iterationen«, das Marbe zum Ausgangspunkt weitgehender Angriffe gegen die bisher als allgemein gültig an-

[1]) Dieser Sachverhalt wird ausführlich dargestellt bei R v. Mises, Elemente der technischen Hydromechanik, Leipzig 1914, S. 29 bis 33.

[2]) Vergl. besonders L Prandtl, Nachr. Ges Wissensch. Göttingen, math phys. Kl. 1918 S. 107 sowie das demnächst hier erscheinende Referat von Trefftz.

[3]) Ueber den bisherigen Stand dieser Frage unterrichtet das in dieser Zeitschr. demnächst erscheinende Referat von F. Noether.

erkannten Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemacht hat[1]). Beide Umstände bewirken aber auch, daß die meisten Teile der physikalischen Statistik dem logisch Denkenden einen höchst unbefriedigenden Eindruck machen und bei allen, Physikern und Mathematikern, die größten Bedenken auslösen. Andererseits arbeitet die Statistik im engeren Sinn, namentlich in Fragen der Fehlerausgleichung, der Bevölkerungslehre und des Versicherungswesens, mit scheinbar großer Sicherheit, indem sie eine Reihe erstarrter Formeln und Begriffe, wie das »Bernoullische Schema«, das Fehlerquadrat, die normale und nicht normale Streuung und ähnliches mehr, weit über den Geltungsbereich ihrer ursprünglichen Definitionen hinaus, handhabt. In mathematischer Richtung handelt es sich heute, abgesehen von der ganz allgemein notwendigen Reinigung der Schlußweisen und Voraussetzungen, um das von Laplace zum erstenmal in Angriff genommene Problem der »Funktionen großer Zahlen«. Die Sache liegt so, daß man in den elementaren Formeln der Kombinatorik (oder eigentlich in den einfachsten Formeln der Arithmetik) die Mittel besitzt, um jedes klar gefaßte Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung — und die Statistik hat keinerlei andere Quellen, wenn sie auch manchmal meint, den Wahrscheinlichkeitsbegriff entbehren zu können — »grundsätzlich« zu lösen. Aber die Berechnung der in Frage kommenden Funktionen nach ihrer ursprünglichen Definition wird zur praktischen Unmöglichkeit, sobald die Veränderlichen die hohen Werte annehmen, die ihnen in den Anwendungen zukommen. Eine systematische, zusammenfassende Behandlung dieser Fragen, die sich dem Grundproblem der praktischen Analysis (s. oben) zwanglos unterordnen, ist seit Laplace nicht wieder versucht worden. Aber gerade die neueste Entwicklung der Analysis hat viel zu ihrer Förderung beigetragen[2]), so daß man jetzt hoffen darf, viele bisher unerledigte Aufgaben der Statistik mit rationellen Methoden in Angriff nehmen zu können.

Wie wir die Aufgaben der mathematischen Statistik an die der Analysis anschließen können, so verfahren wir ähnlich, indem wir den Aufgabenkreis der Mechanik soweit ausdehnen, daß er die Wärmemechanik oder technische Thermodynamik mit umfaßt. Dabei wollen wir weniger an den Ursprung jener Bezeichnung, die sogenannte »mechanische Natur« der Wärme, denken als vielmehr daran, daß die Mechanik der Dampfmaschine oder anderer Wärmekraftmaschinen wesentlich lückenhaft bleibt, solange man nicht die thermodynamischen Ueberlegungen heranzieht, die das »Kraftfeld« der Maschine erst bestimmen. Es war wohl Gustav Zeuner, der zum erstenmal mit der bewußten Absicht, dem Maschinenkonstrukteur zu dienen, die Grundbegriffe der modernen Thermodynamik zur Erklärung der Vorgänge in der Dampfmaschine angewandt hat. In welchem Maße sich die hierhergehörigen Probleme ausgedehnt und vertieft haben, zeigt das große, nur einem Sondergebiet gewidmete, Werk von A. Stodola über Dampfturbinen[3]), das vorbildliche Muster eines technischen Lehrbuches, das um einen Kern unmittelbar praktischer Aufgaben eine Menge fruchtbarer Gedanken aus verschiedenen Gebieten der Theorie sammelt, neue Fragestellungen anregend, alte Probleme aufklärend. Nur für den, der mit dem Inhalt dieser Forschungen gar nicht vertraut ist, muß es ausdrücklich gesagt werden, daß diese Thermodynamik weder in der »reinen«, noch in der »technischen Physik« genügende Berücksichtigung findet. Denn jene, die sich noch traditionell in eine »theoretische« und eine »experimentelle Physik« gliedert, beschäftigt sich ausschließlich damit, den Bereich der erklärbaren Naturerscheinungen zu erweitern, und ist vollauf befriedigt, sobald es gelungen ist, eine neue Gruppe von Tatsachen in ein Gedankenschema sicher einzuordnen, so etwa wie die Differentialgleichungen der Mechanik ein Schema, einen Rahmen, für die Erklärung aller Bewegungserscheinungen abgeben. Derartige Bemühungen bilden wohl eine notwendige Voraussetzung und Vorbedingung für alle technische Verwertung der Naturphänomene, doch keineswegs die einzige und hinreichende, so wenig etwa, wie die Kenntnis dessen, was den physikalischen Inhalt der Elastizitätstheorie bildet, hinreicht, um ein Bauwerk zu berechnen. Die sogenannte »technische« Physik aber ist teils nur eine Zusammenfassung der für die physikalische Technik, d. h. für die Durchführung

[1]) K. Marbe, Die Gleichförmigkeit in der Welt, München 1916; L. v. Bortkewicz, Die Iterationen, Berlin 1917. Vgl. a. R. v. Mises, Die Naturwissenschaften 7 (1919) S 168 ff.

[2]) Hierher gehören die neueren Untersuchungen über das sogenannte Momentenproblem von Stieltjes, vgl. H. Hamburger, Math. Zeitschr. 4 (1919) S. 186 bis 222 und Math. Ann. 81 (1920) S. 235 bis 319 sowie G. Polya, Math. Zeitschr. 8 (1920) S. 171 bis 181.

[3]) A. Stodola, Die Dampfturbinen, 5. Aufl. Berlin (im Erscheinen).

von Experimentaluntersuchungen, in Betracht kommenden Lehren, teils erfüllt sie die Aufgaben, die wir hier für den eigentlichen Maschinenbau im Auge haben, auf bestimmten anderen Sondergebieten der Technik, z. B. dem des Apparatebaues, der Röhrentechnik usf.

Nicht unähnlich liegen die Verhältnisse auf dem auch sachlich verwandten Gebiet der Elektrotechnik und Elektrizitätslehre. Hier hat freilich der große Umfang der praktischen und theoretischen Aufgaben schon längst zu einer Absonderung geführt, die bei allem Nutzen und Vorteil der Arbeitsteilung auch deren Mängel zutage treten läßt. Manche Fragen des Elektromaschinenbaues, wie z. B. die des Pendelns parallel geschalteter Maschinen, sind wesentlich mechanischer Natur und die der Elektrizitätslehre angehörigen Ueberlegungen dienen dabei nur zur Feststellung des Kraftfeldes so, wie das oben hinsichtlich der Thermodynamik erwähnt wurde. Andere Aufgaben, wie etwa die Berechnung von Fernleitungen auf Spannungsabfall zeigen weitgehende formale Analogie mit Rechnungen ganz anderer Art (hier der Festigkeitsberechnung gebogener Balken) und auch die der Elektrotechnik besonders eigentümlichen geometrisch-zeichnerischen Verfahren (Kreisdiagramme usf.) haben schließlich viel allgemeinere Bedeutung und können zweckmäßig von weiteren Gesichtspunkten aus beleuchtet werden. Am engsten werden die Beziehungen zwischen elektrotechnischen Problemen und denen aus anderen Gebieten der angewandten Mathematik dort, wo man sich nicht auf mehr weniger elementare Rechenmethoden beschränken kann, sondern auf die Differentialgleichungsansätze zurückgeht. Es ist bekannt, daß jedes elektrostatische Problem ein hydrodynamisches und vielfach auch ein elastisches Analogen hat, und wenn auch kaum sehr häufig die ganz gleichen Fragestellungen in den verschiedenen Gebieten auftreten (gewisse Abweichungen sind fast immer vorhanden), so erkennt man doch aus dem Bestehen der Analogie, daß es sich mathematisch um ganz ähnliche Aufgaben hier und dort handelt, Aufgaben, die jedenfalls mit denselben approximations-mathematischen Methoden zu behandeln sind. Es schlingt so die »praktische Analysis« ein gemeinsames Band um alle Probleme, die auf die Systeme partieller Differentialgleichungen führen, wie wir sie in ihrer einfachsten Form in der gewöhnlichen Potentialgleichung kennen. Wir meinen, daß es nur zur Förderung all der von diesen Problemen berührten Gebiete ausschlagen kann, wenn wir gegenüber der — an ihrer Stelle auch nützlichen — Spezialisierung hier eine Gelegenheit schaffen, die gemeinsamen Züge der verschiedenen Erscheinungen zu pflegen. —

In der Einleitung ist die Unbestimmtheit und zweifache Relativität, die in dem Begriff der »angewandten Mathematik« steckt, ausführlich dargelegt worden. Der flüchtige Gang durch die lange Reihe verschiedenartiger Probleme, den wir haben folgen lassen, wird sicherlich das Gefühl noch verstärkt haben, daß es sich hier um ein nach außen unsicher begrenztes, nach innen wenig geschlossenes Gebiet handelt. Was wir diesem wenig befriedigenden Eindruck entgegen zu stellen haben, ist vor allem die Berufung auf das praktische Bedürfnis, dem Sammlung und Zusammenfassung lose aneinander hängender Fragen oft mehr dienen kann, als die glatte Abrundung eines einheitlichen Kernes. Gewiß wäre es schöner und ästhetisch befriedigender, wenn wir es nicht nötig hätten, zwischen den Stoffgebieten des Mathematikers, Physikers und Technikers die Reste wahrzunehmen, die von allen Seiten unerledigt bleiben. Man kann sich auch vorstellen, daß einmal eine Zeit kommen wird, die, die einzelnen Wissenzweige in einer höheren Einheit vereinigend, ein derartiges Unternehmen überflüssig erscheinen läßt, wie ja auch den Großen unseres Gebietes, einem Euler oder Gauß, einem Newton oder Cauchy der Zwiespalt zwischen reiner und angewandter Wissenschaft fremd war. Allein niemand kann die Zeit und die Verhältnisse, in die er gestellt und unter denen er zu wirken berufen ist, frei wählen: die Erfordernisse der Gegenwart erkennen und ihnen nach Kräften zu dienen suchen, ist äußerer und innerer Umkreis der Pflicht.

So wollen wir denn die immanente Bedeutung unserer Aufgabe, wie sie sich von einem weitausblickenden historischen Standpunkt aus darstellt, sicher nicht überschätzen. Aber wenn wir hier dem Werke, das von hervorragenden und einsichtigen Männern der letzten Jahrzehnte eingeleitet wurde, einen festen äußeren Rahmen zu schaffen versuchen, so sind wir uns doch bewußt, etwas zu unternehmen, was weder nutzlos noch geringfügig ist und dabei über die Kräfte des einzelnen nicht nur, sondern auch eines einzelnen Geschlechtes hinausgeht. Wie die Baumeister des Mittelalters ihre Bauten begannen, unbekümmert darum, daß sie sie unmöglich zu Ende führen konnten, so vertrauen auch wir, daß trotz der gewaltigen Erschütterungen unserer Zeit, trotz aller die Zukunft unserer Kultur

bedrohenden Erscheinungen, sich stets die Kräfte finden werden, in dieser oder jener Form das Begonnene fortzuführen, solange es nottut. Denen aber, die aus einer Welt »reinerer« Forschung mit Mißtrauen oder Geringschätzung zu uns herübersehen, rufen wir die Worte zu, die eine alte Ueberlieferung dem Heraklit von Ephesus zuschreibt: Entroite, nam et hic dii sunt; tretet ein, denn auch hier wohnen Götter. 12

HAUPTAUFSÄTZE

Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden.

Von L. PRANDTL in Göttingen.

Der Wunsch, die Vorgänge beim Eindringen eines harten Körpers in einen anderen weicheren, wie es beim Härteversuch vorkommt, vom Standpunkt der Mechanik aus besser zu verstehen, hat mich zu einer Lösung für das plastische Gleichgewicht geführt, die diese Vorgänge weitgehend aufklärt und auch sonst vielfacher Anwendung fähig ist. Ich habe darüber bereits in den »Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen«[1]) berichtet. Inzwischen ist es gelungen, die dort angegebene Beweismethode durch eine noch einfachere und trotzdem allgemeinere zu ersetzen. Da die »Nachrichten« wenig verbreitet und dem Ingenieur schwer zugänglich sind, wird bei den folgenden Darlegungen mein genannter Aufsatz nicht als bekannt vorausgesetzt werden.

1. Problemstellung. Die Untersuchung beschränkt sich auf das zweidimensionale (ebene) Problem, weil zur Behandlung des räumlichen Problems ein Weg bisher nicht gefunden werden konnte, und wohl auch wenig Aussicht haben dürfte.

Die plastischen Formänderungen erstrecken sich hier nur auf die der Kraftangriffstelle zunächst liegenden Gebiete des Körpers; in den entfernteren ist die Elastizitätsgrenze nicht überschritten. Da die elastischen Formänderungen bei den meisten Stoffen außerordentlich klein sind, die plastischen aber häufig wesentlich größer, so seien hier zur Vereinfachung die elastischen Formänderungen ganz vernachlässigt, der elastische Teil des Körpers also als starr behandelt. Die plastischen Formänderungen mögen übrigens noch als so klein angesehen werden, daß die geometrische Gestalt des Körpers noch nicht wesentlich durch sie geändert sein soll. Die Volumenänderung soll entsprechend der Vernachlässigung aller elastischen Aenderungen auch im plastischen Teil zu Null angenommen werden, so daß die übrigbleibenden Formänderungen als reine Gleitungen aufgefaßt werden können. Ueber den Spannungszustand im plastischen Gebiet sei nach O. Mohr[2]) angenommen, daß die Schubspannung in den Gleitflächen überall einen von der jeweiligen Normalspannung in diesen Flächen abhängigen Wert hat; sie soll dabei von dem Betrage der Gleitbewegung unabhängig sein. Diese letztere Annahme trifft für die wirklichen plastischen Körper meist nur mit geringer Genauigkeit zu; sie würde sich z. B. beim Zug- oder Druckversuch durch ein Spannungsdehnungsdiagramm gemäß Abb. 1 kundgeben, also der mit zunehmender Formänderung eintretenden Verfestigung keine Rechnung tragen. Für die Durchführbarkeit der folgenden Rechnungen ist sie aber unvermeidbar. Bezüglich des Zusammenhangs der Schubspannungen mit den Normalspannungen sind unsere Annahmen — für das ebene Problem wenigstens — so allgemein, als irgend verlangt werden kann.

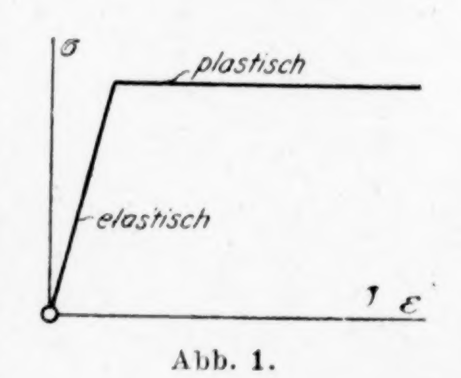


Abb. 1.

[1]) Ueber die Härte plastischer Körper, Nachr. Ges. Wissensch. Göttingen, math.-phys. Klasse, 1920, S. 74.

[2]) Vergl. etwa O. Mohr, Abhandl. aus d. Gebiete d. techn. Mechanik, Berlin 1906, Abt. V, oder auch A. Föppl, Vorlesungen über techn. Mechanik, Bd. V, § 3.

Unter diesen Voraussetzungen hat sich für das Eindringen eines Stempels[1]) in einen von einer Ebene begrenzten unendlich ausgedehnten Körper ein Bild gemäß Abb. 2 ergeben. AB ist die gedrückte Stelle. Ein Dreieck ABC wird unter hohem Druck nach innen gepreßt, die Dreiecke ADF und BEG werden durch die in den Sektoren ACD und BCE auf sie übertragenen Spannungen schräg nach oben herausgeschoben, stehen dabei unter Spannungen, wie ein auf einfachen Druck beanspruchter Körper (Druck parallel der ebenen Begrenzung). Die rechte Hälfte der Figur zeigt die »Stromlinien« der plastischen Bewegung, die linke die Spannungstrajektorien. Es wird nun natürlich darauf ankommen, eine Lösung der Gleichungen des plastischen Gleichgewichts aufzuzeigen, die den in den Sektoren angenommenen Zustand verwirklicht. Dies ist ausführbar und soll im Folgenden gezeigt werden.

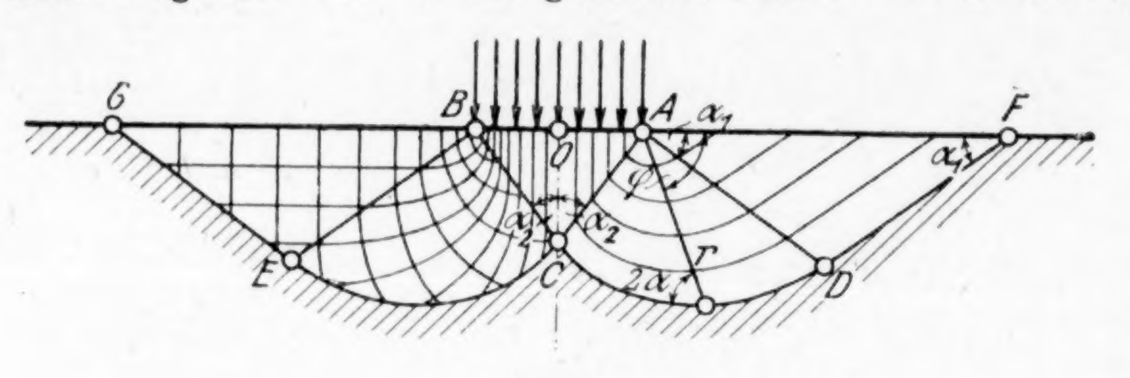


Abb. 2.

2. Formulierung und allgemeine Lösung. Zunächst seien die Bedingungen des plastischen Zustandes näher formuliert. Nach der Mohr'schen Darstellung des Spannungszustandes (Schubspannung τ senkrecht zu der zugehörigen Normalspannung σ aufgetragen) werden die Spannungszustände für die verschiedenen Schnittrichtungen in einem Punkte durch einen Kreis dargestellt, dessen Mittelpunkt auf der σ-Achse liegt. Der plastische Zustand ist dabei dadurch gekennzeichnet, daß die Spannungskreise sämtlich eine Grenzkurve berühren, die durch die Beziehung $\tau = \pm f(\sigma)$ gegeben sein mag. Abszisse und Ordinate des Berührpunktes von Kreis und Grenzkurve liefern dabei die Werte von σ und τ in den Gleitflächen, die mit σ' und τ' bezeichnet werden mögen. Wie man aus der Abb. 3 leicht erkennt, gibt es in jedem Punkt immer ein Paar von Gleitflächen, entsprechend dem oberen und unteren Berührpunkt des Kreises. Der Winkel α der Gleitfläche mit der Hauptachse der größten Druckspannung (bezw. kleinsten Zugspannung) ist dabei bekanntermaßen die Hälfte des Winkels des entsprechenden Kreisradius mit der σ-Achse.

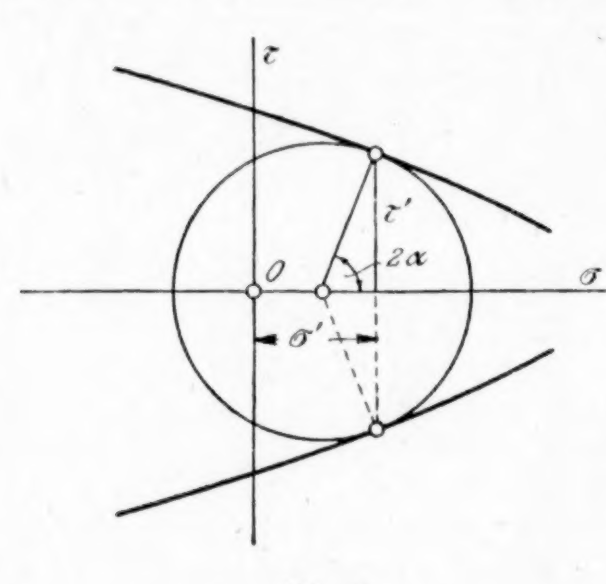


Abb. 3.

Die spezielle Lösung, um die es sich hier handelt, soll nun wegen des Anschlusses der Sektoren an die Dreiecke von der Art sein, daß auf jedem von einem gegebenen Punkte O aus gezogenen Radius (vergl. Abb. 4) die Spannungen σ_r, σ_t und τ konstant sind, also bei Einführung eines Polarkoordinatensystems mit dem Punkt O als Ursprung Funktionen des Winkels φ allein sind. Das Gleichgewicht der Spannungen läßt sich für diesen Fall sehr einfach aus Abb. 4 ableiten. Das Gleichgewicht gegen Verschieben in der Richtung des Radius ergibt die Beziehung

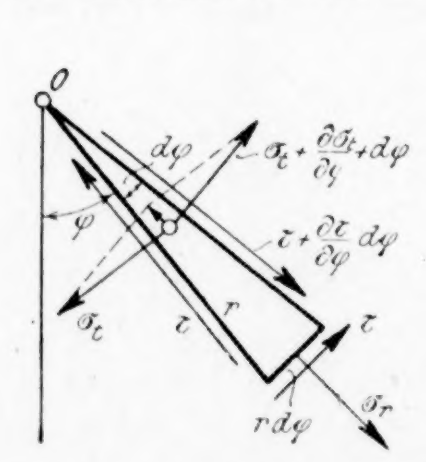


Abb. 4.

$$r \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} d\varphi + r\, d\varphi \cdot \sigma_r - r \cdot \sigma_t\, d\varphi = 0$$

oder

$$\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \sigma_t - \sigma_r \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Das Gleichgewicht der Drehmomente um den Punkt O ergibt

[1]) Entsprechend der Annahme des »ebenen Problems« muß man sich den Stempel senkrecht zur Bildebene als sehr ausgedehnt denken.

$$r \cdot \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} d\varphi \cdot \frac{r}{2} + r\,d\varphi \cdot \tau \cdot r = 0$$

oder

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} = -2\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Dividiert man die Gleichungen (1) und (2) durcheinander, so findet man

$$\frac{d\tau}{d\sigma_t} = -\frac{\sigma_t - \sigma_r}{2\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

In Abb. 5 möge der Punkt A die Spannung auf den Flächen parallel dem Radius (σ_t, τ) darstellen, dann ist die Spannung auf den Flächen parallel der Tangente (σ_r, τ) durch den diametral entgegengesetzten Punkt B des Kreises gegeben, da in der Mohrschen Darstellung immer die doppelten Winkel erscheinen. Es ist also $\overline{CD} = {}^1/_2\,(\sigma_t - \sigma_r)$ und $\overline{AD} = \tau$, somit

$$\frac{2\tau}{\sigma_t - \sigma_r} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \operatorname{tg}\beta.$$

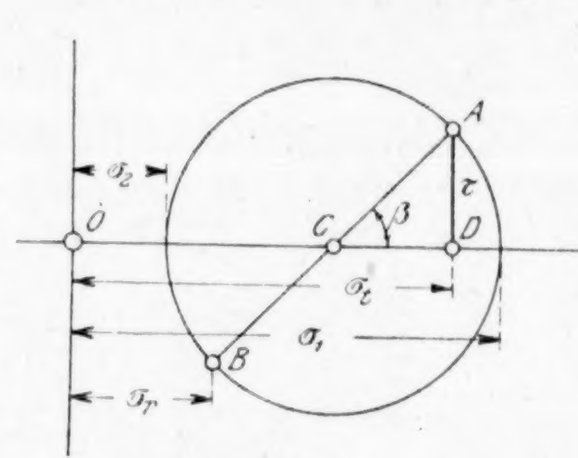


Abb. 5.

Es ist also $\frac{d\tau}{d\sigma_t} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, was besagt, daß die durch Gl. (3) angegebene Fortschreitungsrichtung in der Mohrschen Ebene senkrecht auf dem Radius CA steht. Die Integration der Gleichung (3) führt also einfach auf den in Abb. 5 gezeichneten Kreis. Die Untersuchung der zugehörigen Winkel φ zeigt, daß es sich hier einfach um einen gleichförmigen Spannungszustand handelt, der ja offenbar unter unseren obigen Bedingungen mit enthalten sein muß. Eine nicht triviale Lösung werden wir erhalten, wenn wir statt auf dem Kreis auf der Einhüllenden der Spannungskreise, also auf der Mohrschen Kurve fortschreiten, was offenbar mit Gl. (3) auch verträglich ist. Bei dieser Lösung ist, wie leicht zu sehen, $\sigma_t = \sigma'$ und $\tau = \tau'$ geworden, d. h. die radialen Flächen sind Gleitflächen geworden. Das andere System von Gleitflächen besteht aus spiraligen Zylinderflächen, die mit den Radien den Winkel 2α bilden. In dem Grenzfall $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (s. u.) werden es also Kreiszylinderflächen.

Für die eben beschriebene Lösung läßt sich, da jetzt $\tau = \pm f(\sigma_t)$ ist, Gl. (2) integrieren. Es ist $d\varphi = \mp \frac{d\sigma_t}{2\tau}$ und daher

$$\varphi = \mp {}^1/_2 \int \frac{d\sigma_t}{f(\sigma_t)} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Diese Lösung ist in der Tat die von uns für die sektorartigen Gebiete gesuchte Lösung. Man kann das ganze in Abb. 2 um den Punkt A herumliegende Gebiet von dem Standpunkt unserer Lösungen als einheitliches Gebiet auffassen und erhält dafür nun unter der Bedingung, daß AF druckfrei und AB mit senkrechtem Druck belastet ist, in der Mohrschen Ebene einen Verlauf unserer Lösung gemäß Abb. 6. Dem ersten vom Nullpunkt aus beginnenden Kreisbogen OP entspricht der Winkelraum DAF, dem Stück PQ der Grenzkurve der Winkelraum CAD, dem anschließenden Kreisbogen QR mit dem Ende auf der σ-Achse der Winkelraum BAC.

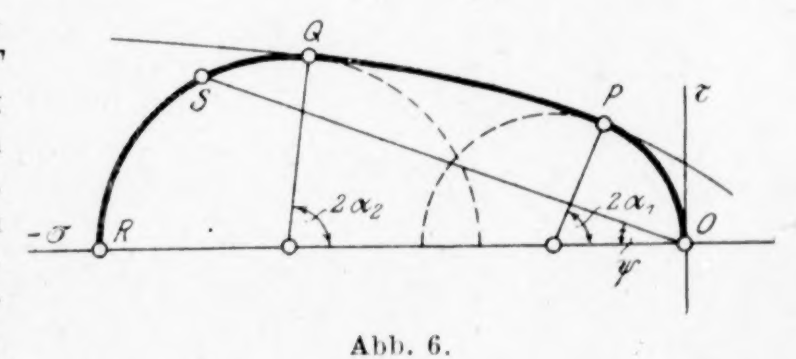


Abb. 6.

Für die Beurteilung der Ergebnisse sind die Formeln für die Hauptspannungen wichtig. Diese sind aus Abb. 4 leicht abzulesen. Es ist nämlich $\sigma_1 = \overline{OC} + \overline{CA}$, $\sigma_2 = \overline{OC} - \overline{CA}$. Nun ist $\overline{CA} = \frac{\tau}{\sin\beta}$; weiter ist $\overline{OC} = \sigma_t - \frac{\tau}{\operatorname{tg}\beta}$. Dem Früheren gemäß wird $\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = -\frac{d\tau}{d\sigma_t}$, also $\frac{1}{\sin\beta} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{d\tau}{d\sigma_t}\right)^2}$. Damit ergeben sich die Hauptspannungen

$$\sigma_{\substack{1\\2}} = \sigma_t + \tau\left(-\frac{d\tau}{d\sigma_t} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{d\tau}{d\sigma_t}\right)^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

3. Durchführung für die stumpfe Schneide. Die Formeln, die die Lösung für Abb. 1 liefern, sind offenbar auch geeignet, die in Abb. 7 dargestellte Belastung eines abgestumpften schneidenartigen Körpers zu berechnen. Da dies der allgemeinere Fall ist, möge die weitere Behandlung unserer Formel an diesen Fall angeknüpft werden. Man kann, wenn ϑ der halbe Schneidenwinkel ist, ferner α_1 und α_2 der Gleitwinkel für einfache Druckspannung bezw. für den Spannungszustand unter der belasteten Fläche ist, das Folgende festsetzen:

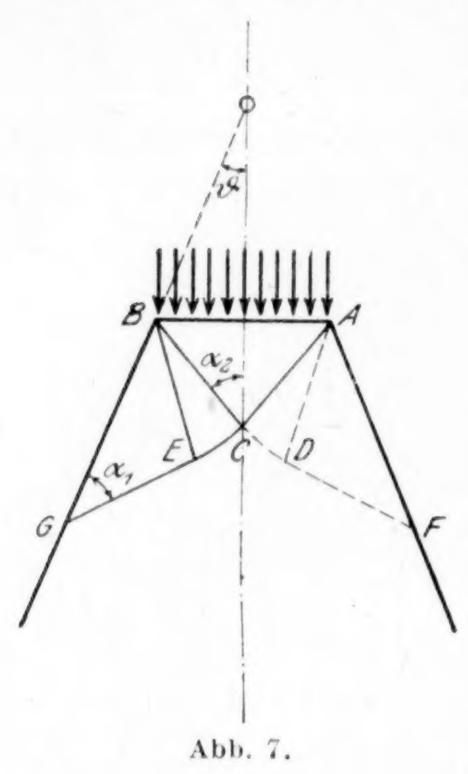


Abb. 7.

1) Für $\varphi = \alpha_1$ soll die Hauptspannung σ_1 gleich Null, die Hauptspannung σ_2 gleich der Druckfestigkeit, also $= -\sigma_d$ sein.

2) Für $\varphi = \alpha_2 + \vartheta$ (Außenwinkel des Dreiecks!) ist dann σ_2 gleich der gesuchten Belastung der Schneide, die mit $-\sigma_s$ bezeichnet werden mag.

Die Ausführung der Rechnung erfordert, wenn etwa die Mohrsche Grenzkurve zeichnerisch gegeben ist, eine Quadratur und im übrigen eine Lösung der eben vorgezeichneten Aufgabe durch Probieren. Die Verhältnisse werden einfach, wenn die Grenzkurve durch eine Gerade ersetzt werden kann.

In dem praktisch wichtigsten Fall, der z. B. bei den plastischen Metallen sehr genau verwirklicht ist, ist an der Fließgrenze die größte Schubspannung konstant, die Grenzkurve besteht also aus einer wagerechten Geraden: $\underline{\tau = \pm K}$.

Hier wird gemäß Gl. (4) $\sigma_t = \mp 2K\varphi + C'$, also mit $\frac{d\tau}{d\sigma_t} = 0$, wenn in der Gleichung für σ das Minuszeichen genommen wird,

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \sigma_t \pm \tau = K(\pm 1 - 2\varphi) + C'.$$

Der Gleitwinkel ist hier konstant $\alpha = \frac{\pi}{4}$, ferner ist die Druckfestigkeit $\sigma_d = 2K$; die Hauptspannungen unter einem beliebigen Winkel ergeben sich bei Berücksichtigung der ersten Grenzbedingung zu

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = K(-1 \pm 1 - 2(\varphi - \alpha)) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

die in dem mittleren Keilstück ($\varphi = \alpha + \vartheta$) also gleich

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = -K(1 \mp 1 + 2\vartheta),$$

die Schneidenfestigkeit somit zu

$$\underline{\sigma_s = \sigma_d(1 + \vartheta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Auch für den Fall, daß man die schräge Gerade

$$\underline{\tau = \pm(K - \varkappa\sigma_t)}$$

als Gleichung der Grenzkurve annimmt, sind die Rechnungen unschwer durchzuführen. Es wird $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\varkappa} = \operatorname{tg} 2\alpha$, also auch hier $\alpha =$ konst. Ferner wird aus Gl. (3)

$$\varphi = \pm \frac{1}{2\varkappa} \ln \tau + C,$$

also

$$\tau = C' e^{\pm 2\varkappa\varphi}$$

und

$$\sigma_t = \frac{1}{\varkappa}(K - \tau).$$

Die Hauptspannungen werden mit dem Pluszeichen in obigen Formeln und also mit $\frac{\delta\tau}{\delta\sigma_t} = -\varkappa$

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\varkappa}\left(K - \tau\left(1 + \varkappa^2 \mp \varkappa\sqrt{1 + \varkappa^2}\right)\right).$$

Die Durchrechnung der Grenzbedingungen liefert, wenn zur Vereinfachung

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{1 + \varkappa^2}} = k$$

gesetzt wird, wobei dann k der Sinus des Neigungswinkels δ der Grenzgeraden ist, nach leichter Rechnung

$$\sigma_{\frac{1}{2}} = \frac{K}{\varkappa}\left(1 - \frac{1 \mp k}{1 - k} e^{2\varkappa(\varphi - \alpha)}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

mit $\sigma_d = \frac{K}{\varkappa} \frac{2k}{1-k}$ wird für $\varphi = \alpha + \vartheta$:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_d}{2k} \left[(1+k) e^{2\varkappa\vartheta} - (1-k) \right] \qquad (9).$$

Das zweite Gleitflächensystem schneidet hier die Zeichenebene in logarithmischen Spiralen, die den Winkel 2α mit den Radien, also den Winkel δ mit der Richtung senkrecht zum Radius bilden; ihre Gleichung ist also $r = a e^{\mp \varkappa \varphi}$.

4. Einzelausführungen. Die numerischen Verhältnisse für die Eindringungsfestigkeit einer Ebene $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ lassen sich an Hand der folgenden Tabelle ersehen, in der für Neigungswinkel der Grenzgeraden von 0 bis 40° die Werte von $\frac{\sigma_s}{\sigma_d}$ (»Härte«: Druckfestigkeit), sowie die für das Verhältnis der Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{AB}$ in Abb. 2 angegeben sind.

Das Verhältnis $\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$ ist unschwer zu berechnen. Es ist

$$\overline{AF} = 2\overline{AD} \cos\alpha; \; \overline{AD} = \overline{AC} e^{\varkappa\vartheta} \text{ und } \overline{AB} = 2\overline{AC} \sin\alpha, \text{ also}$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = e^{\varkappa\vartheta} \operatorname{ctg} \alpha \qquad (10).$$

Zahlwerte für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

δ	α	$\varkappa$	k	$\frac{\sigma_s}{\sigma_d}$	$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$
0°	45°	0,000	0,000	2,571	1,000
10°	40°	0,1763	0,1736	3,499	1,572
20°	35°	0,3640	0,3420	5,194	2,530
30°	30°	0,5773	0,5000	8,701	4,290
40°	25°	0,8391	0,6428	17,56	8,462

Man erkennt, daß mit steigendem δ (abnehmendem α) $\frac{\sigma_s}{\sigma_d}$ und $\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}$ stark anwachsen. Große Werte von δ kommen bei erdartigen plastischen Körpern vor.

Es ist zu vermuten, daß auch bei vielen als spröde angesehenen Körpern vor dem Eintritt des Bruches eine, wenn auch geringe plastische Deformation einhergeht. Die obigen Formeln können also — wenigstens als Notbehelf — auch für solche Fälle herangezogen werden. Wenn freilich die plastischen Formänderungen nicht, wie hier angenommen wurde, groß sind gegenüber den vorhergegangenen elastischen, dann wird man aus unserer Rechnung nicht allzuviel folgern dürfen.

Wie eingangs bemerkt, gelten die hier berechneten Zustände zunächst für einen unendlich ausgedehnten Körper. Damit sie bei einem endlich ausgedehnten Körper zu treffen, muß gefordert werden, daß die seitlichen Grenzen des Körpers von der Druckfläche um Strecken abstehen, die groß sind gegen die Strecke $\overline{AF}$, sonst kann nicht mit Sicherheit angenommen werden, daß in dem in Abb. 2 schraffierten Gebiet die Fließgrenze unüberschritten bleibt. Im Fall ihrer Ueberschreitung würde sich die Formänderung anders als berechnet vollziehen.

Im Falle einer großen Plastizität des Materials kommt die Verfestigung während der Formänderung störend in Betracht. Diese wirkt, wie Versuche an Flußeisen gezeigt haben, und wie es auch sehr plausibel ist, vor allem in der Richtung, daß die Verschiebungszonen, die sich aus der Theorie zum Teil als flächenhaft ergeben haben (die Dreiecksgrenzen in Fig. 2 und 7) mit wachsender Formänderung immer breiter werden, was so zu verstehen ist, daß das bereits plastisch umgeformte Gebiet widerstandsfähiger geworden ist und so die Gleitung auf Gebiete, die noch nicht deformiert sind, übertragen wird. Die Festigkeiten beim Auftreten der charakteristischen Fließfiguren stimmen, wie der nachfolgende Versuchsbericht des Hrn. Dr. Nádai zeigen wird, gut mit den Formeln.

In meiner Abhandlung in den Göttinger Nachrichten ist noch die Formänderung genauer untersucht, die beim Eindringen einer harten Walze in das plastische Material zu erwarten ist. Dieser Abschnitt mag hier als zu weitab führend übergangen werden.

5. Schräge Belastung. Aus den hier abgeleiteten Beziehungen läßt sich auch unschwer ablesen, was sich ergibt, wenn eine abgestumpfte Schneide — oder aber auch eine ebene Fläche — schräg belastet wird. Die Winkelhalbierende des Druckkeiles ABC wird in diesem Fall etwas schräg liegen, so daß die Normalbelastung und Tangentialbelastung (Reibung) auf der Druckfläche einen Punkt des Kreises QR in Abb. 6 ergeben. [Die Ermittlung dieses Punktes (S) im Fall, daß der Winkel ψ des schrägen Druckes gegeben ist, ist in Abb. 6 angedeutet.] Die Konstruktion der Sektoren würde hier zwei Sektoren von verschieden großen Zentriwinkeln ergeben, denen nach den Formeln auch zwei verschiedene Beträge der Hauptspannung in dem Druckkeil entsprechen würden. Dies ist natürlich nicht möglich. Die Lösung ist vielmehr die, daß in dem Sektor mit größerem Winkel die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird und der Formänderungsvorgang sich einseitig nach der Richtung, die durch die Reibungskraft vorgezeichnet ist, vollzieht. In Abb. 7 sind die für einen solchen einseitigen Vorgang in Betracht kommenden Gleitflächen ausgezogen, die hierbei festbleibenden dagegen punktiert. Theoretisch genügt eine noch so kleine Richtungsabweichung des Druckes, um den Vorgang sich einseitig vollziehen zu lassen. Wird umgekehrt die Richtung, in der der harte Stempel, der den Druck ausübt, sich bewegt, durch einen Mechanismus vorgeschrieben, so ist für alle Richtungen innerhalb $\pm \alpha_2$ der Widerstand genau in der Winkelhalbierenden der Schneide (kleine Formänderungen vorausgesetzt), und es genügt daher eine noch so geringfügige Reibung, den Druckkeil in einer dieser Richtungen zu führen, wobei natürlich die Beträge der Formänderung in den beiden Sektoren verschieden sind. Erst bei Bewegungen von einer Schräge größer als α_2 wird die Richtung der Druckkraft schräg. Bei weiterem Wachsen der Schräge erreicht der schiefe Druck schließlich den Reibungswinkel, wobei dann zu dem plastischen Vorgang ein Gleiten in der Druckfläche hinzukommt.

6. Ausblicke. Es ist möglich, daß von diesen Ueberlegungen aus eine Theorie der Bearbeitung plastischer Körper mit Werkzeugen entwickelt werden kann. Einstweilen steht dem allerdings noch entgegen, daß die Theorie bisher nur für kleine Formänderungen ausgebildet werden konnte, während es in diesem Fall sich immer um große Formänderungen handelt.

Ein anderes mögliches Anwendungsgebiet tritt bei der Frage der Tragfähigkeit eines bestimmten Baugrundes auf. Ist z. B. die Baugrube keilförmig ausgeschachtet und ihre Sohle vom Mauerwerk gerade ausgefüllt, so hat man, abgesehen vom Eigengewicht der Erdmassen, eine der hier angegebenen sehr ähnliche Belastung mit Winkeln ϑ, die nahe an zwei Rechten sind.

Göttingen, 25. November 1920. 7

Versuche über die plastischen Formänderungen von keilförmigen Körpern aus Flußeisen.

Von A. NÁDAI in Göttingen.

Im Anschluß an die Lösung, die Hr. Prandtl im vorangehenden Aufsatz für den Spannungszustand eines plastisch deformierbaren Körpers angegeben hat, in dessen Oberfläche ein prismatischer Stempel eindringt, seien einige Versuche über die Widerstandsfähigkeit von keilförmigen Körpern mitgeteilt, bei denen die bleibenden Formänderungen in der Umgebung der Druckfläche beobachtet wurden.

1. Versuchsanordnung. In der Prandtlschen Arbeit ist die Spannung σ_s im engsten Querschnitt einer abgestumpften Schneide, bei der der Gleitvorgang sich durch den Keilkörper hindurch voll ausgebildet hat, in Beziehung zur Fließgrenze des gewöhnlichen Druckversuches (Quetschgrenze) σ_d des Stoffes gebracht. In diese Beziehung geht als wesentliche unabhängige Veränderliche der Oeffnungswinkel 2ϑ des Schneidenkeiles ein. Dem Keilwinkel $\vartheta = 0$ entspricht $\sigma_s = \sigma_d$, d. h. wenn die Schneide

durch zwei parallele Ebenen begrenzt ist, fällt die Spannung σ_s mit der Quetschgrenze zusammen; mit wachsendem Winkel ϑ nimmt die Schneidenfestigkeit σ_s zu. Bei einem Winkel $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ geht der Keil in den durch eine Ebene begrenzten Körper über und man kann die Spannung σ_s in der Druckfläche als ein Maß für die »Härte« des Materials, bezogen auf das ebene Spannungsproblem, bezeichnen. (Es ist wohl kaum nötig, anzumerken, daß diese Zahl nicht mit der Kugeldruckhärte übereinstimmt.)

Die Zunahme der Schneidenspannung σ_s im engsten Querschnitt mit dem Keilwinkel 2ϑ wurde an einem plastisch deformierbaren Stoff einer Prüfung durch den Versuch unterworfen. Es wurden aus einer Stange von weichem Flußeisen eine Anzahl von prismatischen Versuchskörpern herausgeschnitten. Sie hatten eine Länge von $l = 70$ mm und Querschnitte nach Abb. 1 bis 4; die Breite b der durch zwei schiefe Ebenen begrenzten und durch eine wagerechte Ebene abgestumpften Schneiden betrug 4 bis 8 mm, ihr Keilwinkel $2\vartheta = 45, 90, 135$ und 180^0. Die Breiten b der Schneiden wurden mit einem Komparator von Zeiss gemessen. Die Abmessungen der Körper waren:

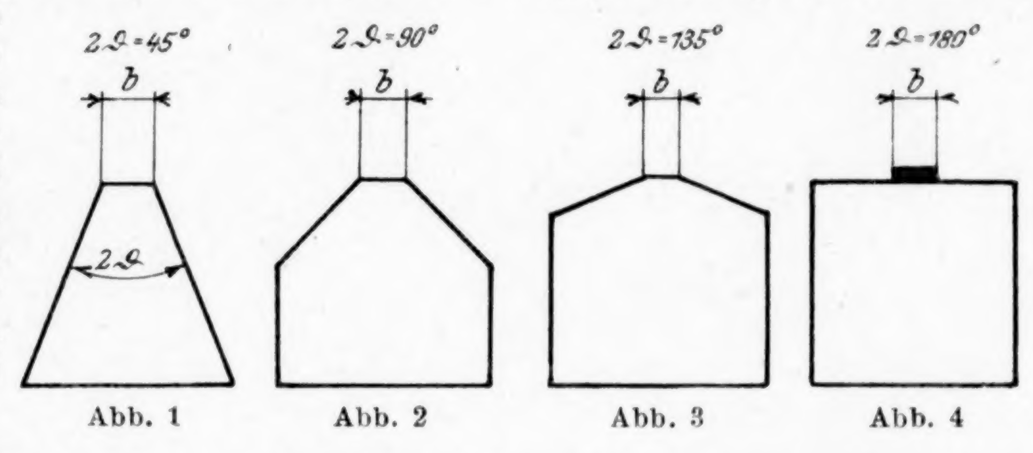


Abb. 1 Abb. 2 Abb. 3 Abb. 4

Schneide		1	2	3	4	5	6	7
Keilwinkel	$2\vartheta =$	45^0	45^0	90^0	90^0	90^0	135^0	135^0
mittlere Breite in mm	$b =$	7,99	9,84	8,10	7,98	4,05	6,85	3,73
Länge in mm	$l =$	69,38	68,84	69,27	68,40	71,20	70,40	70,22
Druckfläche in cm²	$bl =$	5,55	6,77	5,61	5,46	2,88	4,82	2,62

Auf die Versuchskörper (a in Abb. 5 und 6) wurde eine abgestumpfte Stahlschneide (c) mit einem Winkel von 90^0 gelegt; beide Stücke wurden zwischen den Druckplatten einer hydraulischen Presse zusammengedrückt. Die Breite b des engsten Querschnittes war derart bestimmt, daß das Stahlprisma durch die Druckbeanspruchung keine merkbaren bleibenden Formänderungen erlitt. Zur Verwirklichung des Falles $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ wurden zwischen a und c Streifen aus gehärtetem Stahl gelegt. Die Versuchskörper wurden vor ihrer Verwendung ausgeglüht. Ihre Einstellung in die Druckrichtung geschah mit möglichster Sorgfalt.

Zur Messung der auf der Festigkeitsmaschine ausgeübten Druckkraft diente eine Martenssche Meßdose mit einem Präzisionsmanometer, dessen Anzeigen vermittels der bekannten elastischen Verkürzung von einem Kontrolldruckkörper geeicht wurden. Einem Grad der Manometerteilung entsprach eine Kraft von 150 kg.

Die bleibenden Formänderungen der Versuchskörper konnten mit Hilfe eines auf den Stirnflächen der beiden Prismen a und c (Abb. 5 und 6) befestigten Feinmeßgeräts (Spiegelapparat) von Martens beobachtet werden. Die Anzeige des Gerätes gab den Mittelwert der axialen Verschiebung von zwei Marken auf den Stirnflächen der Prismen an und enthielt neben den Verschiebungen, die vom Probekörper herrührten, auch die elastische Verkürzung des Stahlprismas.

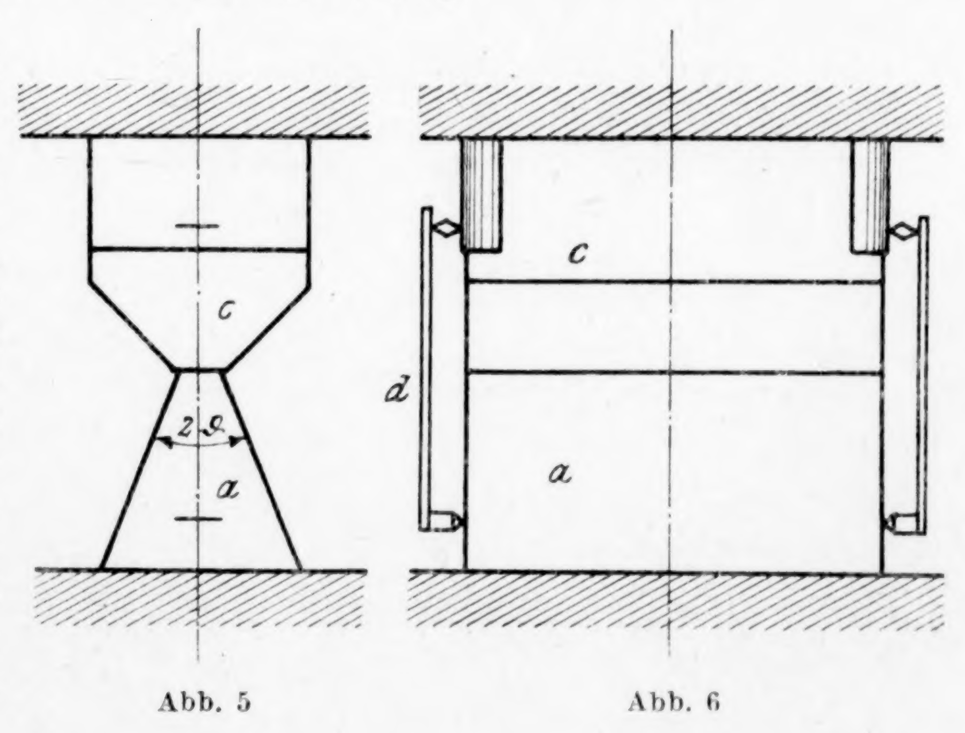


Abb. 5 Abb. 6

Ein weiteres Hilfsmittel zur Beobachtung der bleibenden Formänderungen in einem plastisch deformierbaren Metall sind die Fließ-

figuren. Sie treten auf der Oberfläche spiegelnd polierter Metalle auf. Das glänzend geschliffene Metall büßt sein Spiegelungsvermögen ein, wenn seine Oberfläche durch die bleibende Verlagerung der Kristallkörner in eine Schar regellos orientierter Flächen verwandelt wird. Das Einsetzen der bleibenden Verschiebungen äußert sich durch das Mattwerden der Oberfläche des Metalles, durch das Auftreten der von Lüders, L. Hartmann, Martens und O. Mohr beschriebenen Fließfiguren. Ihre Ausbreitung über die polierten Seitenflächen der Versuchskörper gab Aufschluß über die bleibenden Verschiebungen an den Schneidenkanten.

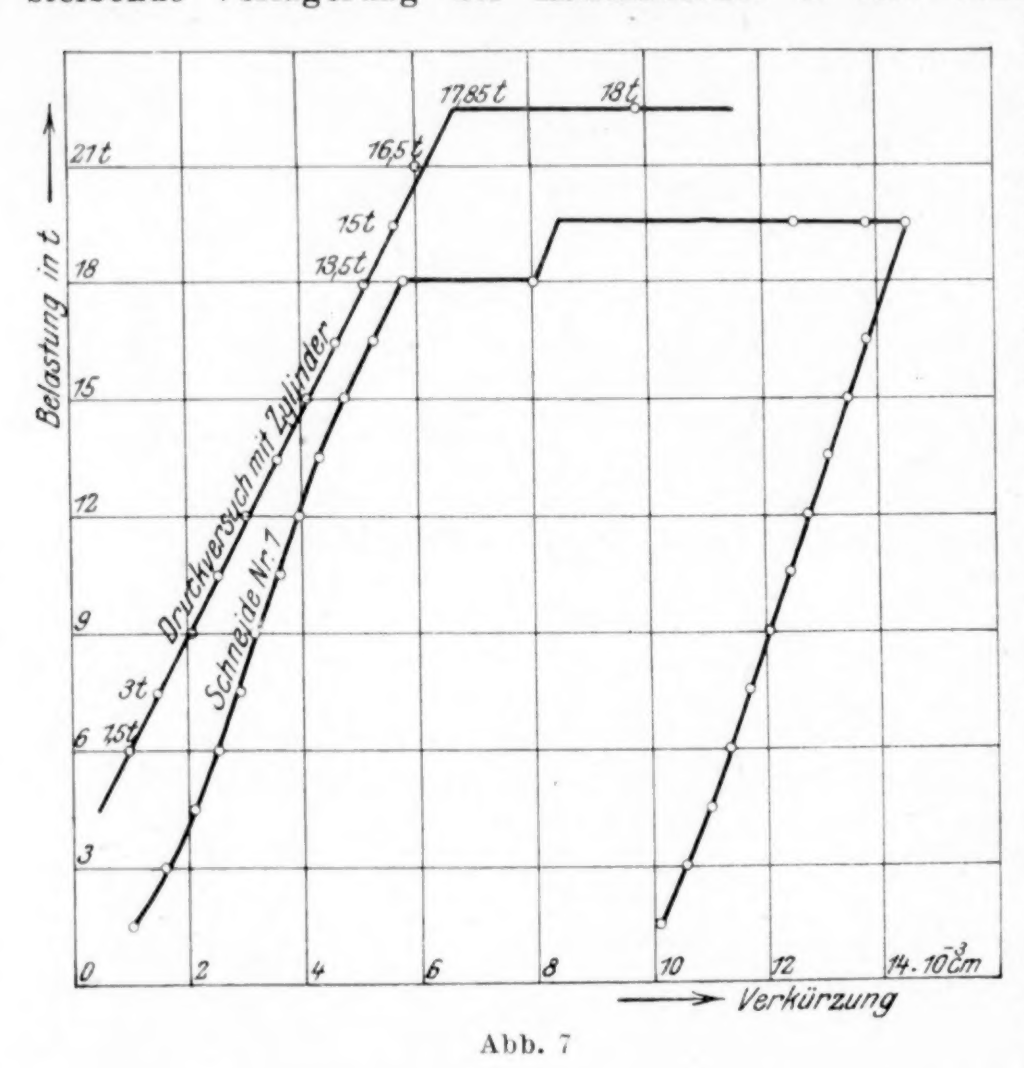


Abb. 7

2. Versuchsergebnisse.

In Abb. 7 ist für einen Druckversuch mit einem Versuchskörper (Nr. 1) mit dem Keilwinkel $2\vartheta = 45^0$ die Druckkraft in Abhängigkeit von der axialen Verkürzung aufgetragen. Abb. 8 gibt die Entstehung der Fließfiguren während des Versuches auf den beiden geneigten Begrenzungsebenen des Keiles wieder. Die ersten Spuren von bleibenden Formänderungen zeigten sich an den Schneidenkanten; nachdem die Last auf 18 t gesteigert wurde, bildete sich auf der einen Längsseite eine feine matte Linie (*cc*) in einem mittleren Abstand von 8 bis 9 mm von der Längskante der Schneide, deren Dicke unter der konstant gehaltenen Kraft von einem feinen Strich bis zu einem anderthalb Millimeter dicken Streifen sich verbreiterte. Gleichzeitig traten neue Linien auf der andern Längsseite auf. Nach Steigerung der Kraft von 18 auf 19,5 t entstand plötzlich parallel zur Schneidenkante die Linie *ee*, welche sich ebenfalls schnell verbreiterte.

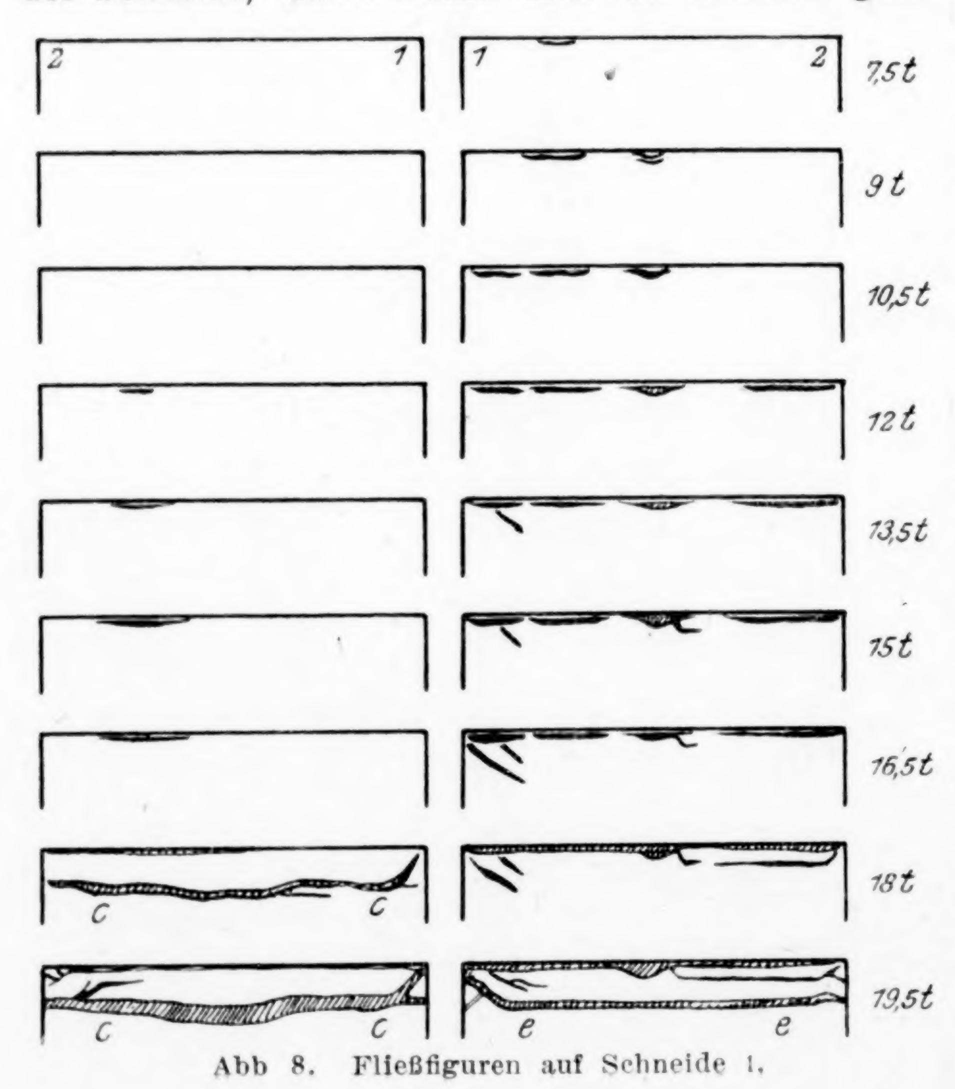


Abb. 8. Fließfiguren auf Schneide 1.

Nach dem Versuch wurden mit Hilfe eines leichten Fühlhebels, der einen kleinen Spiegel trug, mit Fernrohrablesung 3 Querprofile der Seiten der Schneide aufgenommen. Sie sind in stark überhöhtem Maßstab in Abb. 9 (vergl. S. 23) wiedergegeben. Die terrassenförmigen Erhöhungen, welche sich auf den Seitenflächen gebildet haben, zeigen, daß die Deformation im wesentlichen in einer Parallelverschiebung eines Gebietsstreifens in Richtung der Schneidenkante bestanden hat. Die Breite des verschobenen Streifens war annähernd gleich der Schneidenbreite. Das Maß der Verschiebung senkrecht zu den Seiten der Schneide betrug einige

Hundertstel Millimeter, die Böschung in den Profilen fiel mit den matten Fließlinien zusammen.

Die Spannung σ_s im kleinsten Querschnitt der Schneide, unter welcher sich die Linie *cc* gebildet hatte, betrug

$$\sigma_s = \frac{18000}{5{,}55} = 3250 \text{ kg/cm}^2.$$

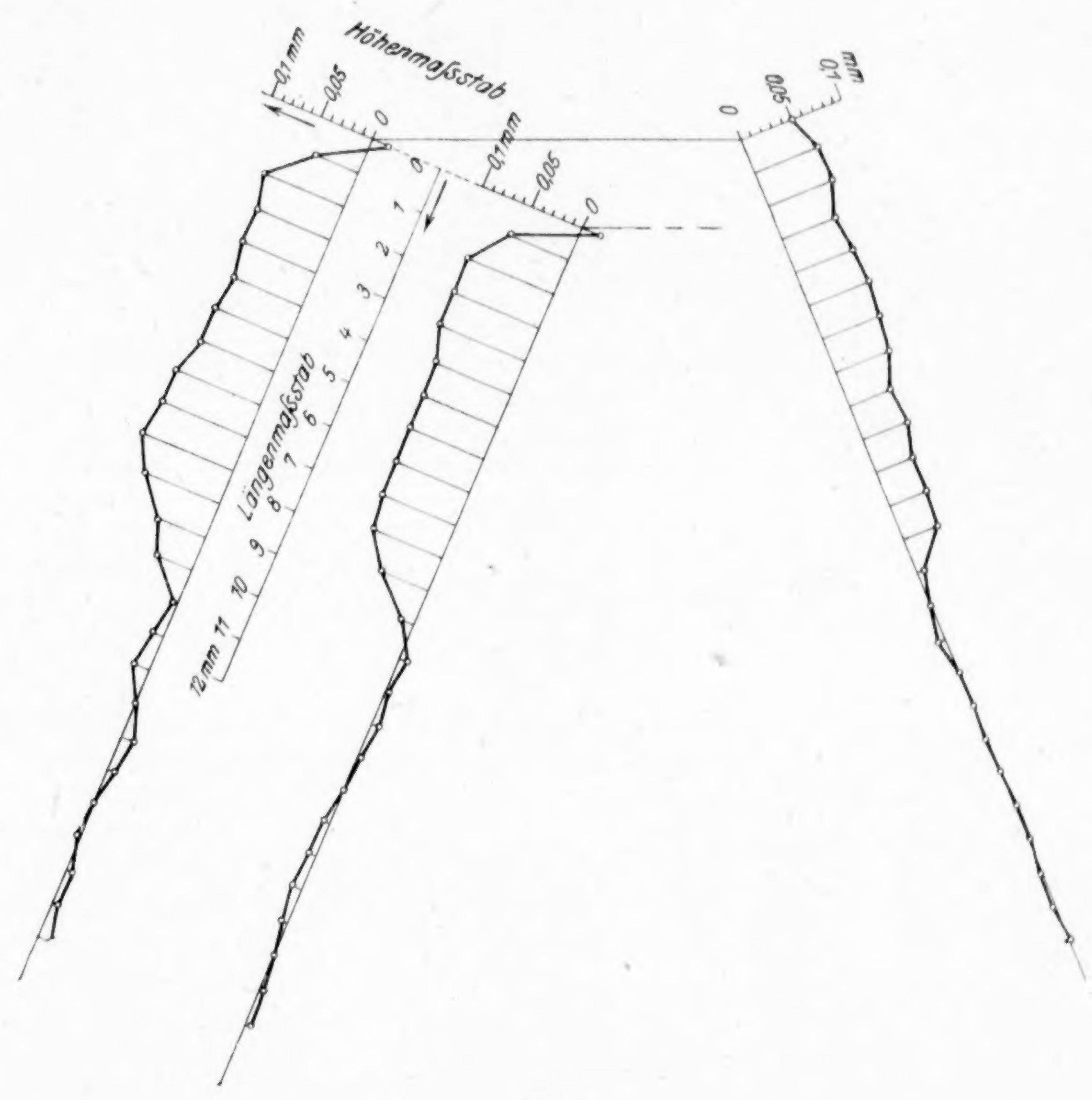


Abb. 9

Die Quetschgrenze des Flußeisens wurde aus zwei Druckversuchen mit zylindrischen Körpern (deren Länge dreimal so groß als ihr Durchmesser war) zu 2300, bezw. zu 2490 kg/cm², also im Mittel zu $\sigma_d = 2395$ kg/cm² ermittelt. Das Verhältnis $\sigma_s : \sigma_d$ ergab sich somit gleich

$$\sigma_s : \sigma_d = 3250 : 2395 = 1{,}36.$$

Aus der von Hrn. Prandtl angegebenen Formel Gl. (7) S. 18 folgt für den speziellen plastischen Körper (einen Stoff, dessen Fließgrenze für Zug und Druck gleich hoch liegt, was beispielsweise für weiches Flußeisen zutrifft) für den Keilwinkel 45° der Wert

$$\sigma_s : \sigma_d = 1 + \vartheta = 1 + \frac{\pi}{8} = 1{,}39.$$

Abb. 10 gibt die Entstehung der Fließfiguren an einer Schneide mit dem Keilwinkel von 90° wieder. Ihre Seitenflächen zeigten bis zu einem Druck von 11,25 t keine Veränderung, bei 12 t wurde entlang der Schneidenkante ein schmaler Streifen matt. Nachdem die Last von 12,75 t einige Minuten gewirkt hatte, entwickelten sich auf

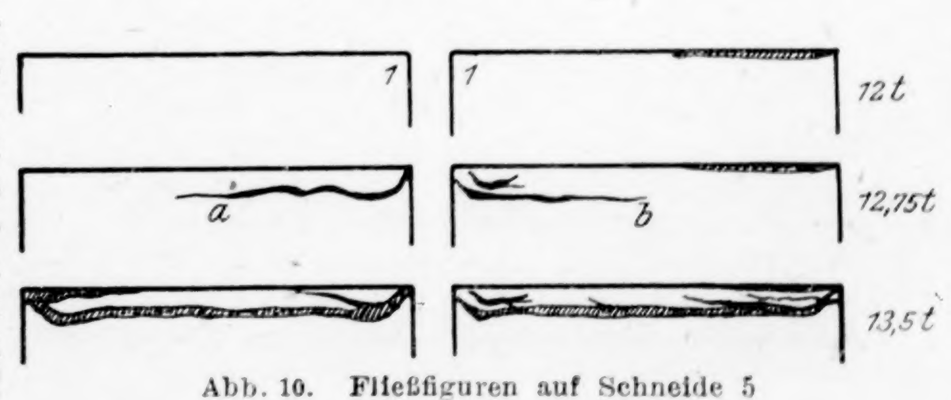


Abb. 10. Fließfiguren auf Schneide 5

beiden Seitenflächen die Linien a und b ungefähr bis zur Hälfte. Bei 13,5 t **traten sie in ihrer ganzen Länge zutage und verbreiterten sich.** Die Spannung σ_s **betrug hier im engsten** Querschnitt (2,88 cm²)

$$\sigma_s = 12\,750 : 2{,}88 = 4430 \text{ kg/cm}^2,$$

das Verhältnis $\sigma_s : \sigma_d = 4430 : 2395 = 1{,}85$ **gegenüber dem rechnerischen Wert** $1 + \frac{\pi}{4} = 1{,}79$.

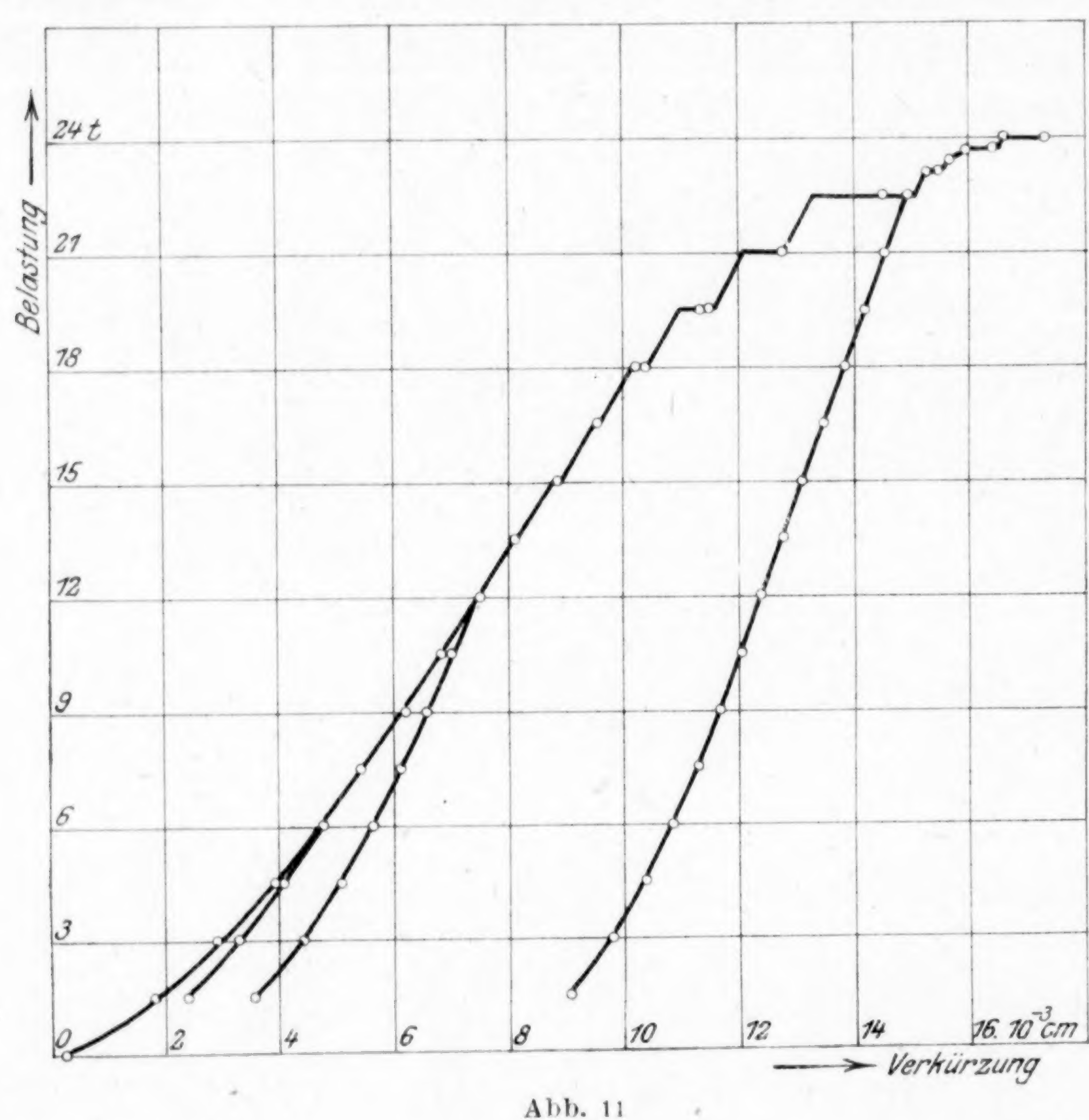


Abb. 11

Abb. 12

Die Abb. 11 und 12 zeigen einen weiteren Versuch mit einer Schneide von demselben Keilwinkel (90°). Ihre Breite war an dem einen Ende um nicht ganz zwei Zehntel-Millimeter größer als an dem andern Ende. Diese Ungleichmäßigkeit des Querschnittes genügte, um den Fließvorgang ziemlich zu stören, wie dies an Hand der Abb. 12 deutlich wird. Er setzte hier mit einem seitlichen Abrutschen des Endes mit der geringeren Breite ein, vermutlich erhielt die Schneide außerdem an den beiden Enden mehr Druck als in ihrer Mitte, und eine gleichmäßige Druckverteilung bildete sich erst nach Einsetzen des Fließvorganges aus, wofür auch der Verlauf der Entlastungskurven in Abb. 11 spricht, die nach jeder Kraftsteigerung steiler werden.

Die Abb. 13 bis 22 zeigen die Fließfiguren, die an den obigen und an einigen anderen Versuchskörpern erhalten wurden. Die Bilder der schrägen Flächen der Schneiden sind in eine gemeinsame Ebene umgeklappt.. Die Fließfiguren sind von freier Hand gezeichnet, nachdem die Abszissen und Ordinaten einer größeren Zahl von Punkten maßstäblich in die Zeichnung übertragen wurden. Oberhalb jeder Abbildung ist die maximale Spannung, bezogen auf den engsten Querschnitt, angegeben, bis zu welcher der betreffende Versuchskörper beansprucht war. Die Last, bei der die Fließfiguren auf den Schneiden mit dem stumpfen Keilwinkel (135°) auftraten, konnte nicht festgestellt werden, weil diese Probestücke unmittelbar zwischen den Druckplatten belastet wurden, so daß sich die Entstehung der

Linien der Beobachtung entzog. Beim Versuchskörper 8, Abb. 20, mit dem Winkel $2\vartheta = \pi$ blieb die Fließfigur auf der oberen Seite bis zu einer Spannung von 7280 kg/cm² in dem Druckstreifen aus. Die Zeichnung auf der Stirnfläche zeigt den Grund, der Ver-

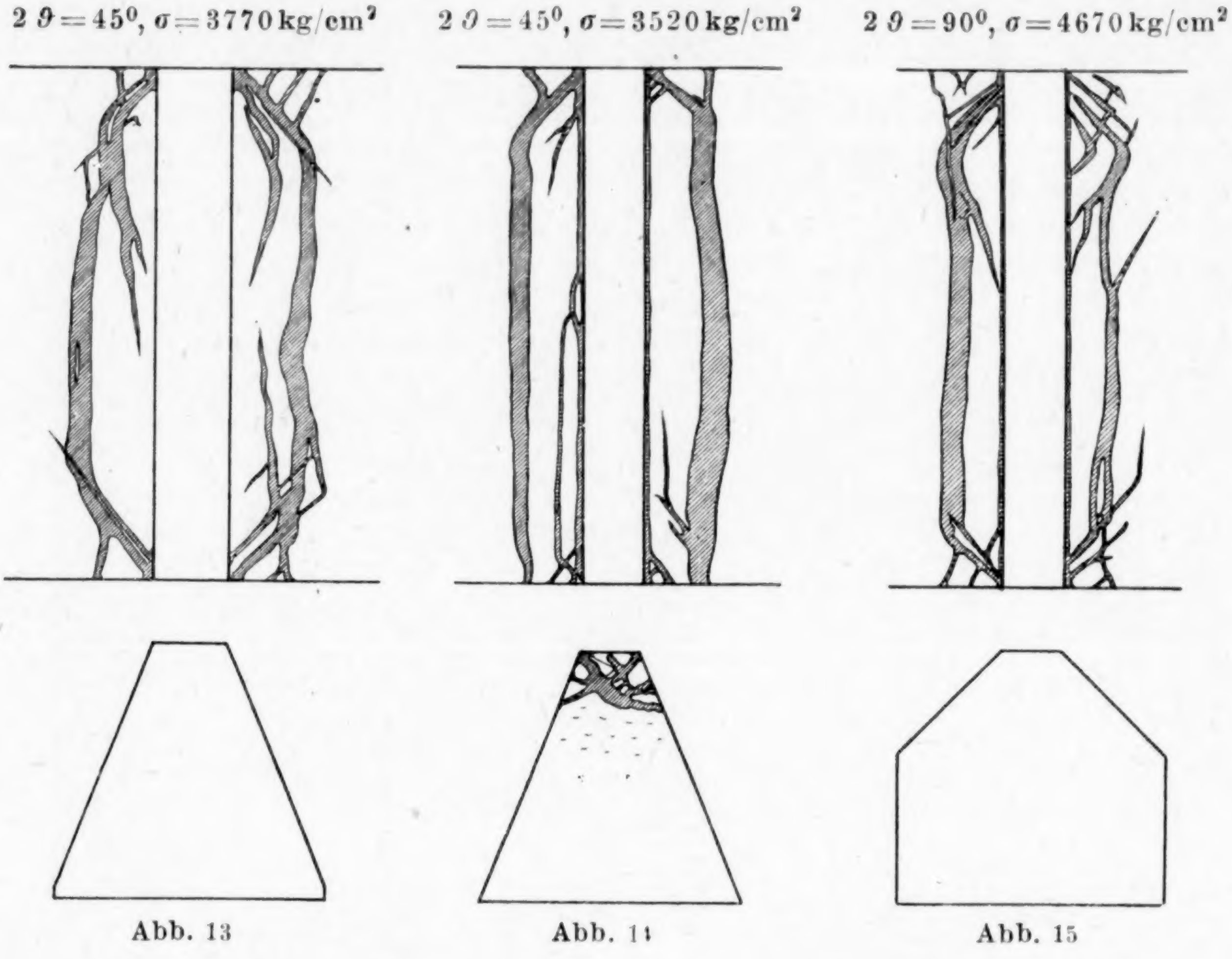


Abb. 13 Abb. 14 Abb. 15

suchskörper wurde seitlich abgequetscht. Wegen seiner im Verhältnis zum Druckstreifen geringen Breite und der Nähe der an der Spannungsübermittlung wenig beteiligten Ecken konnte sich kein wagrechter Druck entlang seiner Oberfläche ausbilden. Hierauf wurde der zum Eindrücken benutzte Stahlstreifen auf einer unbeschädigten Seite desselben Probekörpers in der Querrichtung des Parallelepipeds aufgelegt und der Versuch wiederholt. Die Oberfläche blieb bis zu einer Kraft von 6,75 t blank, unter der Last von 7,13 t und einer mittleren Spannung von 5540 kg/cm² in der Druckfläche traten die Fließlinien schön auf (Abb. 21 und 22).

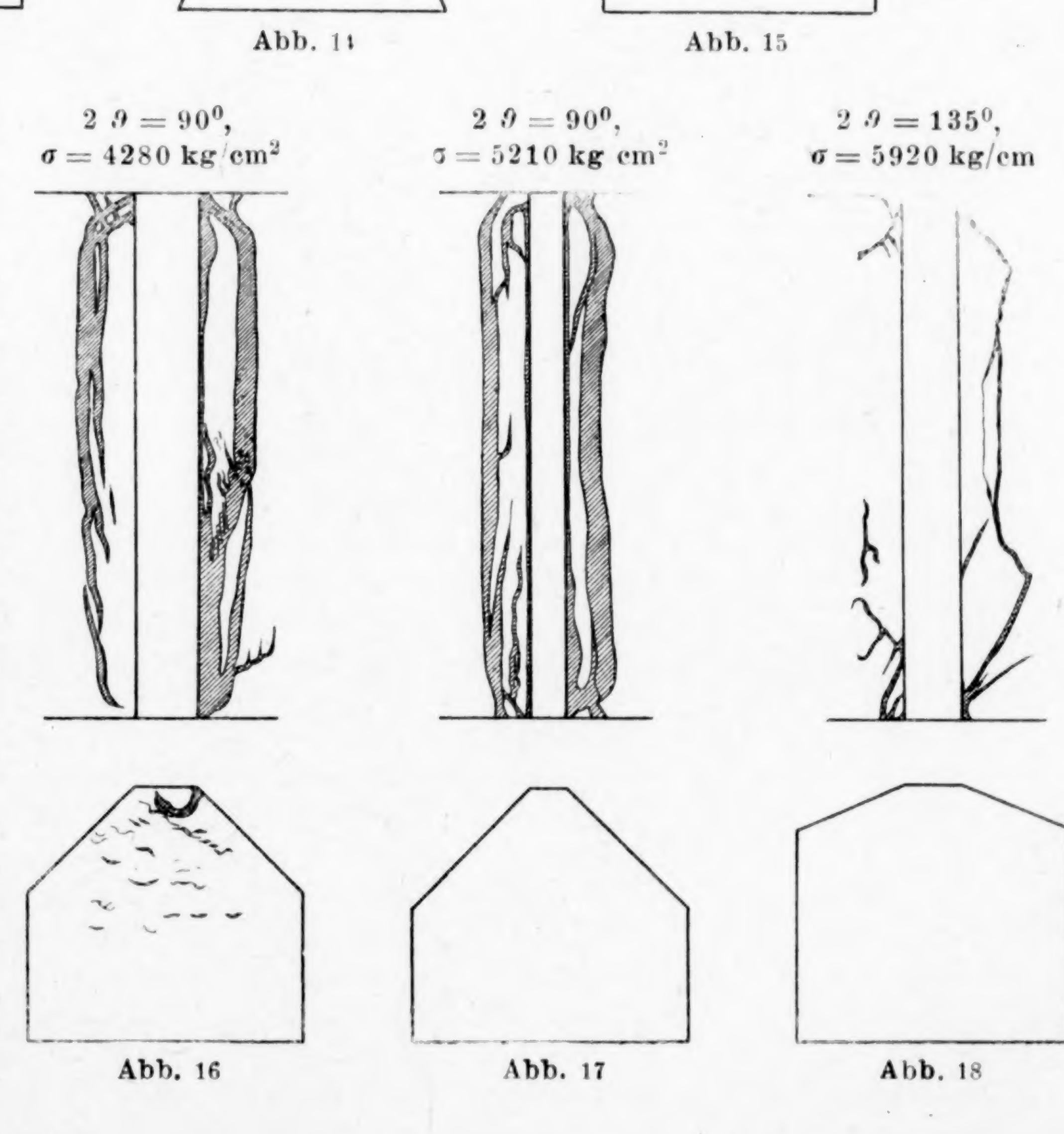


Abb. 16 Abb. 17 Abb. 18

3. Vergleich mit der Theorie. Die Zahlen für das Verhältnis $\sigma_s : \sigma_d$, der Schneidenfestigkeit zur Fließgrenze, sind, wie die nachfolgende Zusammenstellung zeigt, in guter Uebereinstimmung mit dem Wert $1 + \vartheta$ von Gl. (7) S. 18.

Versuchskörper:		1	2	3	5	8
Keilwinkel	$2\,\vartheta =$	45^0	45^0	90^0	90^0	180^0
Spannung im kleinsten Querschnitt	$\sigma_s =$	3250	3330	3850	4430	5540 kg/cm²
$\sigma_s : \sigma_d$	$=$	1,36	1,39	1,61	1,85	2,31
$1 + \vartheta$	$=$	1,39	1,39	1,79	1,79	2,57

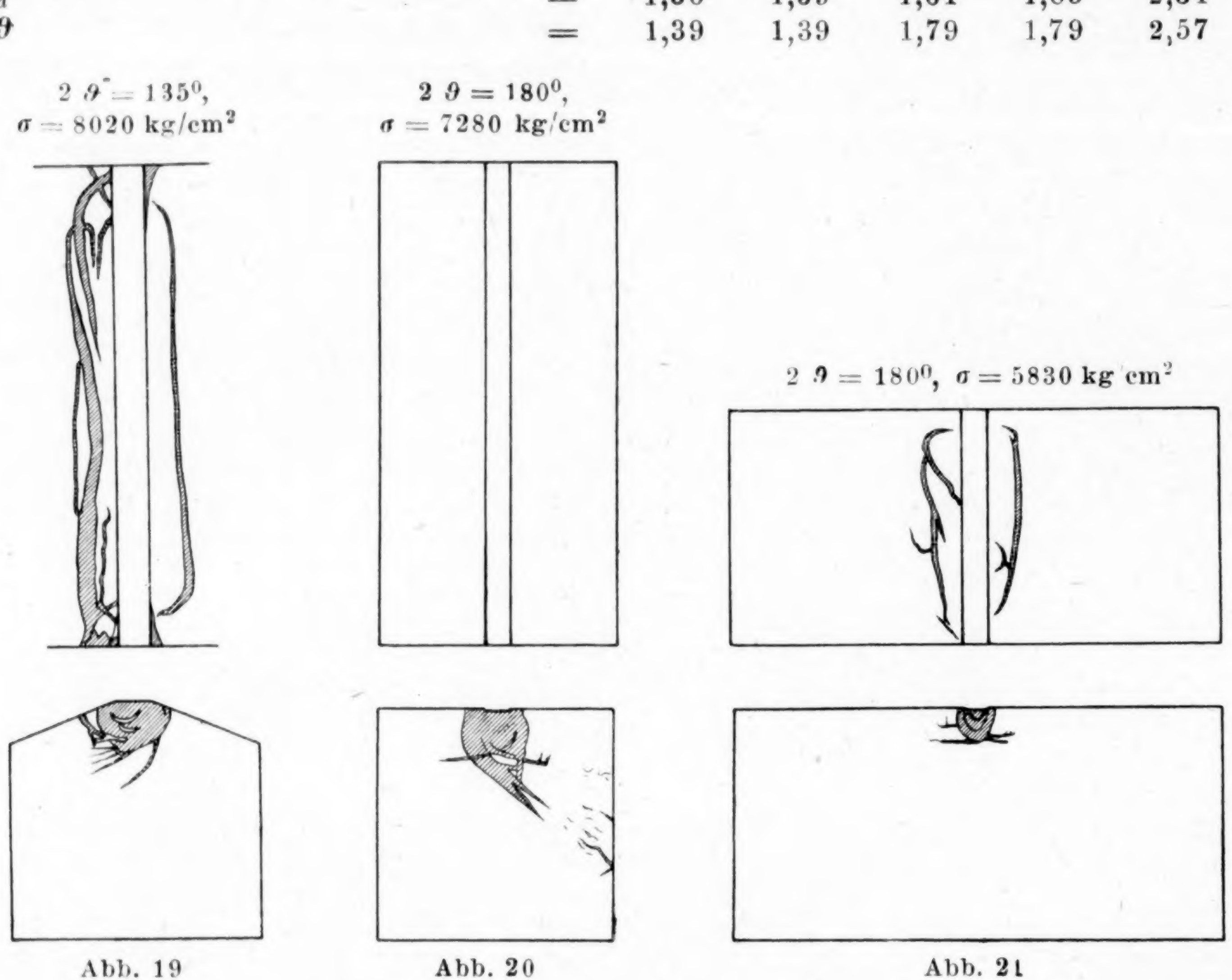


Abb. 19 Abb. 20 Abb. 21

Die Gestalt der Fließfiguren steht gleichfalls in Einklang mit dem, was hinsichtlich des Auftretens der Grenze des plastischen Gebietes nach den Annahmen von Hrn. Prandtl (vergl. auch die Abb. 1 und 6 auf S. 16 u 18) bei einem plastisch deformierbaren Stoff wie Flußeisen zu erwarten stand. Die Versuchskörper zeigen in mehr oder minder deutlich ausgeprägter Art die für das seitliche Abschieben der Schneidenflanken charakteristischen Fließlinien in einem Abstand von der Kante, der annähernd gleich der Schneidenbreite (b) ist. (Daß diese Linien sich allmählich zu Streifen verbreitert haben, ist die Folge der beginnenden Verfestigung des Stoffes in den Gebieten, die plastische Formänderungen mitgemacht haben und in denen die Kristallite bereits zu den molekularen Umlagerungen zum Teil herangezogen wurden, zu denen sie unter günstigen Umständen befähigt sind.)

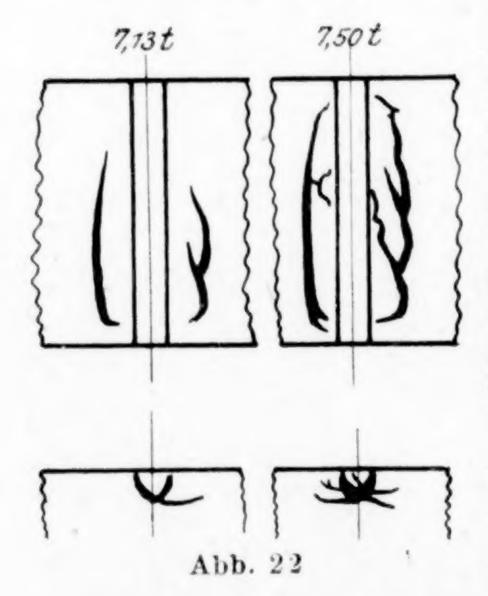


Abb. 22

Außer den langen Fließlinien verdienen zu der Schneidenkante schief gerichtete Linien und die Abweichungen der Parallelen Erwähnung, welche ebenfalls in auffallender Regelmäßigkeit an den Enden der Schneiden in den Bildern wiederkehren. Sie hängen mit der Aenderung des ebenen Spannungszustandes an den Stirnflächen der Prismen zusammen. Da die mit der Schneidenkante parallel gerichtete Hauptspannung (die in dem mittleren Teil der Prismen von Null verschieden ist) an den Stirnflächen verschwindet, wird der ebene Spannungszustand in den Versuchskörpern in seinen beiden Formen verwirklicht. Im vorwiegenden Teil herrscht der ebene Spannungszustand mit einer von Null verschiedenen Hauptspannung in der Querrichtung zu seiner Ebene, an den Enden der Prismen der ebene Spannungszustand mit der Hauptspannung Null in jener Richtung. Im mittleren Teil der Schneide sind die elementaren Gleitebenen parallel zur Kante, an den Stirnflächen um die lotrechte Druckrichtung gegen die andern um den Winkel 90^0 gedreht. Mit dieser Rich-

tung dürften die schief gerichteten Fließlinien übereinstimmen. Sie hängen vermutlich mit der bekannten Kegel- bezw. Pyramidenbildung beim Bruch von kurzen Zylindern oder von Würfeln eines auf Druck beanspruchten spröden Stoffes zusammen, auf welchen Vorgang auch die Reibung an den Druckplatten von Einfluß ist. Diese Andeutungen über die verschiedenen Störungen des Spannungszustandes, die sich bei Druckversuchen mit verhältnismäßig niedrigen Körpern nur schwer ganz vermeiden lassen[1]), mögen hier genügen.

4. Bemerkungen zum ebenen Härteproblem. Ich möchte schließlich gewisse Fließfiguren erwähnen, die auf den Stirnflächen der Versuchskörper auftraten und mir für die Beschreibung des Vorganges beim ebenen Härteproblem von Wichtigkeit erscheinen. Gelegentlich des Zusammenpressens von zwei Prismen von rechteckigem Querschnitt aus Flußeisen, zwischen die ein dünner Streifen aus Stahl gelegt war (Abb. 23), zeigten sich unter verhältnismäßig geringen Flächenpressungen halbkreisförmige Fließfiguren auf den Stirnflächen der Prismen. Sie traten in etwas verzerrter Gestalt auch auf den Stirnflächen der Schneiden mit dem stumpfen Keilwinkel, und zwar ebenfalls unter einer verhältnismäßig geringen Pressung auf. Aus der bekannten Lösung des ebenen Spannungsproblems von J. H. Michell[2]) für die in einem Punkte eines geraden Randes angreifende Einzelkraft folgt die Spannungsfunktion

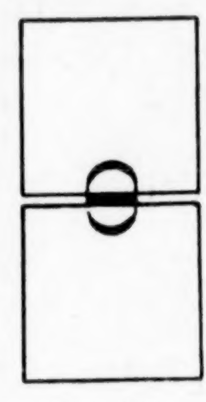


Abb. 23

$$F = -\frac{p}{2\pi}(r_1^2 \varphi_1 - r_2^2 \varphi_2)$$

mit den Spannungskomponenten

$$\sigma_x = -\frac{p}{\pi}\{\varphi_1 - \varphi_2 + {}^1/_2 (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2)\}$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{\pi}\{\varphi_1 - \varphi_2 - {}^1/_2 (\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2)\}$$

$$\tau = \frac{p}{2\pi}(\cos 2\varphi_1 - \cos 2\varphi_2)$$

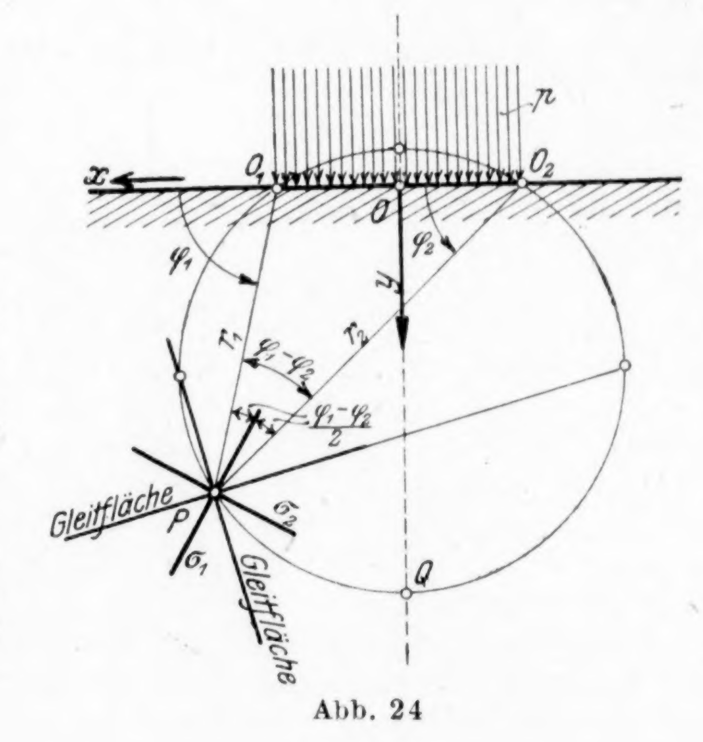


Abb. 24

für die Lösung des auf der Strecke $O_1 O_2$ (Abb. 24) mit einem gleichmäßigen Druck p belasteten Körpers im elastischen Bereich der Formänderungen. Die Richtungen der Hauptspannungen im Punkte P (x, y) halbieren den Winkel der beiden Radienvektoren $O_1 P = r_1$ und $O_2 P = r_2$ (die Spannungstrajektorien sind ein System konfokaler Ellipsen und Hyperbeln mit den Punkten O_1 und O_2 als Brennpunkten), die größte Schubspannung ist in einem beliebigen Punkt gleich

$$\tau_{\max} = \frac{p}{\pi}\sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

d. h. sie hat auf jedem Kreise, der durch die Punkte O_1 und O_2 hindurchgeht und dessen Mittelpunkt auf der Symmetrieachse $O\,Q$ liegt, einen unveränderlichen Wert. (Die Hauptspannungen sind überdies auf diesen Kreisen konstant, nämlich $= -\frac{p}{\pi}\{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\}$.) $\tau_{\max}$ erreicht also seinen absolut genommen größten Wert $\frac{p}{\pi}$, wenn $\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ ist, d. h. auf dem Halbkreise $O_1 A O_2$ (Abb. 26) mit $O_1 O_2$ als Durchmesser. Auf diesem letzteren, beziehungsweise auf der Fläche des über

[1]) So besitzt beispielsweise die elastische Verschiebung in den Punkten O_1 und O_2 bei der gleichförmigen Druckverteilung nach der Abb. 24 eine Anomalie, indem der Differentialquotient $\partial\eta : \partial x$ in diesen Punkten unendlich groß wird. Der Druck kann sich im elastischen Bereich der Formänderung nicht gleichmäßig bis an den Rand der Druckfläche verteilen. (Er müßte sogar auf ∞ zunehmen, wenn ein vollkommen ebener Eindruck erzeugt werden soll (Boussinesq) und nimmt bei der Berührung leicht konvexer Flächen auf Null ab (H. Hertz).)

[2]) London, Math. Soc Proc Bd 32, 1900, S. 35; vergl. auch A. und L Föppl, »Drang und Zwang«, Bd 1, München 1920, S 284.

ihm als Grundfläche errichteten Zylinders ist das erste Fließen und zwar bei einem Druck $p = \frac{2}{\pi} \sigma_d$ (für den speziellen plastischen Körper) zu erwarten.

Die Rechnung und die obige Beobachtung machen es wahrscheinlich, daß während der Zunahme der Kraft die durch zwei benachbarte Kreisbogen begrenzte Sichel $O_1 A O_2$ (Abb. 25) zuerst in den plastischen Zustand gerät und daß die Scholle elastischen Materiales vom Querschnitt des halben Kreiszylinders, die sich infolgedessen von dem elastischen Untergrund lostrennt, erst später plastisch wird. Aus der Größe und der Richtung der Hauptspannungen entlang dem Kreise $O_1 A O_2$ (man entnimmt ihre Konstruktion aus Abb. 26) läßt sich noch der Schluß ziehen, daß die plastische Deformation im tiefsten Punkte (A) in einem wagerechten Ausweichen des Materiales in der Längsrichtung (Länger- und Dünnerwerden) der Sichel besteht, während die Spitzen O_1 und O_2 wie der Keil in der Abb. 27 verzerrt werden. Da die Verschiebungen der Grenzflächen auf die elastischen Gebiete rückwirken müssen, wird der Spannungszustand in ihnen von Beginn der bleibenden Verschiebungen an gänz-

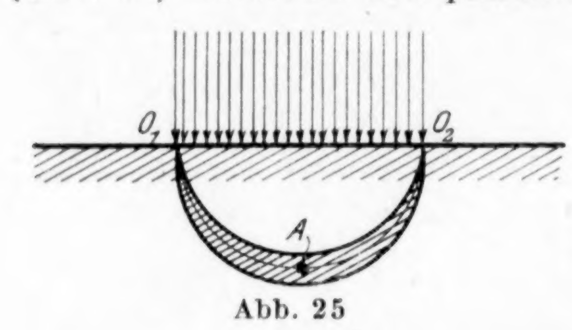


Abb. 25

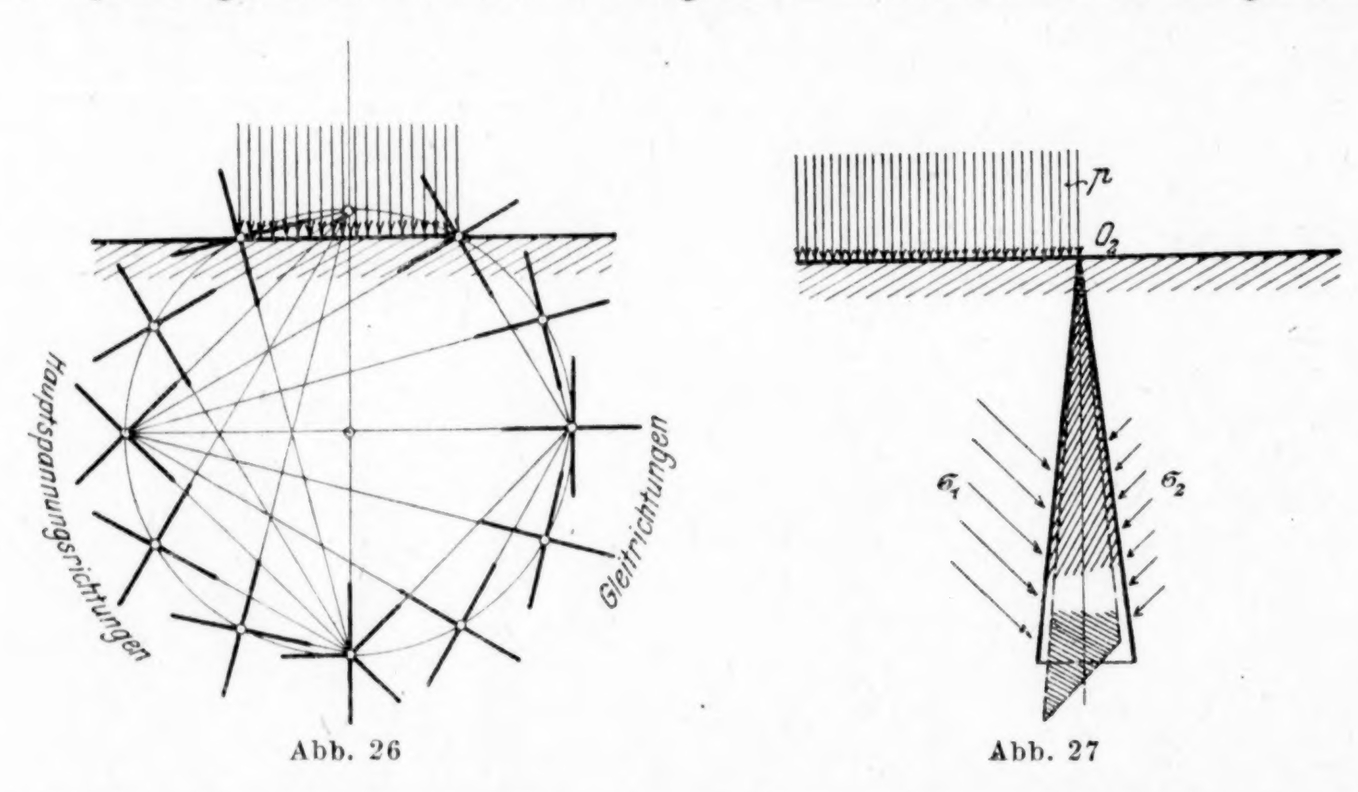


Abb. 26 Abb. 27

lich geändert. Man erkennt die große Vereinfachung, die in der Einführung der Prandtlschen Annahme einer starren Grenze des plastischen Gebietes besteht, einer Annahme, welche die Verschiebungen und Spannungen im plastischen Bereich der Rechnung zugänglich gemacht hat.

Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen, November 1920. 9

Berechnung der Eigenschwingungen statisch-bestimmter Fachwerke. [1]

Von **E. POHLHAUSEN** in Warnemünde.

Die Stäbe eines Fachwerkes werden in der Praxis dimensioniert auf Grund einer statischen Berechnung, die — wie ihr Name sagt — von einem System am Fachwerk ruhender Lasten ausgeht. Wird ein Fachwerk stark wechselnden Verkehrslasten oder periodisch wirkenden Kräften ausgesetzt, so entstehen in dem Fachwerke Schwingungen. Diese führen zu dynamischen Beanspruchungen der Stäbe, über die die gewöhnliche Fachwerkstatik nichts auszusagen vermag, die aber zu erheblichen Be-

[1]) Rostocker Habilitationsschrift.

trägen anschwellen und die Zerstörung des Fachwerkes herbeiführen können. Die Gefährdung gewisser Brücken durch den Gleichschritt einer Marschkolonne ist wohl das bekannteste Beispiel aus der Erfahrung für diese Art der Erscheinungen.

Trotzdem wird eine dynamische Berechnung von auszuführenden Fachwerken bislang in der Regel unterlassen. Der Grund hierfür liegt in dem Fehlen einer Methode, die mit einem für die Praxis erträglichen Aufwande von Zeit und Mühe gestattet, die Schwingungen in einem Fachwerk rechnerisch zu verfolgen.

Die älteren Untersuchungen über diesen Gegenstand — von Steiner[1]), Engesser[1]), Deslandres[1]), Lebert[1]) — beschäftigen sich nicht mit eigentlichen Fachwerken, sondern beschränken sich auf Tragwerke, die sich näherungsweise als ein schwingender Stab auffassen lassen. Die Schwingungen in Fachwerken sind zum ersten Male von **Reissner**[2]) behandelt worden. Den beiden Arbeiten von Reissner gebührt das Verdienst, wirklich bis zur zahlenmäßigen Darstellung der Eigenfrequenzen einfacher statisch bestimmter und unbestimmter Fachwerke vorgedrungen zu sein und damit eine Vorstellung von ihrer Größenordnung geschaffen zu haben. Der dazu erforderliche Aufwand an formaler Rechnung bewegt sich jedoch an der Grenze des praktisch Durchführbaren, besonders wenn man sich nicht auf die Ermittelung der Frequenzen beschränkt, sondern die wirklich eintretenden Beanspruchungen der Stäbe finden will.

Wir entwickeln daher im folgenden ein Verfahren, das auf graphisch-numerischem Wege ermöglicht, die Frequenzen der Eigenschwingungen von Fachwerken zu berechnen. Die praktische Anwendung dieser Rechnung besteht bekanntlich darin, daß man aus Sicherheitsgründen vermeiden muß, die Frequenzen periodisch veränderlicher Belastungen mit denen der Eigenschwingungen nahe oder ganz zusammenfallen zu lassen.

Der I. Teil der nachstehenden Arbeit enthält die vollständige Darstellung und Ableitung des Verfahrens zur näherungsweisen Bestimmung der Schwingungszahlen; Teil II bringt eine etwas erweiterte analytische Formulierung und den exakten Nachweis für die Konvergenz des im ersten Teile angegebenen Näherungsweges. Zunächst wird (Nr. 1) gezeigt, daß die aus der Elastizitätstheorie bekannten Differentialgleichungen der Längs- und Querschwingungen eines geraden Stabes bei gewissen hier zulässigen Vernachlässigungen zu dem Ansatz (8) führen, der besagt, daß jeder Stab bei seiner Schwingung die gradlinige Gestalt beibehält[3]); wem dies von vornherein annehmbar erscheint, kann daher gleich mit Nr. 2 beginnen. Hier werden nach der Lagrangeschen Methode die Gleichungen für die kleinen Schwingungen des durch die N Knotenpunkte bestimmten Systems von $2N-3$ Freiheitsgraden aufgestellt und integriert, was zu dem Ansatz (32) von $2N-3$ homogenen linearen Gleichungen führt. Die Determinante dieser Gleichungen null gesetzt, ergibt die Gleichung $(2N-3)$ten Grades für die Schwingungszahlen. Statt aber die praktisch kaum durchführbare Auflösung dieser Gleichung direkt in Angriff zu nehmen, wird in Nr. 3 ein Verfahren entwickelt, das völlig analog dem bekannten Vianelloschen Verfahren zur Auffindung der Knicklasten beliebig beanspruchter Stäbe[4]), auf zeichnerischem Wege (Konstruktion von Kräfte- und Verschiebungsplänen) eine Folge immer besserer Näherungswerte für die Frequenzen zu finden gestattet. — Analytisch läßt sich jedes elastische System von endlich viel Freiheitsgraden in dieser Weise behandeln und der Teil II liefert nach Erörterung der charakteristischen Eigenschaften der Amplituden-Verhältnisse (Nr. 1) den allgemeinen Beweis (Nr. 1) dafür, daß die Fortsetzung der in I beschriebenen Näherungsfolge zu einem bestimmten Wert der ersten und dann auch der höheren Eigenschwingungszahlen führt.

---

[1]) Steiner: Zeitschr. östr. Archt.- Ing.-Ver. 1892. — Engesser: Zeitschr. östr. Archt.- Ing.-Ver. 1892. — Deslandres: Annales des ponts et chaussées 1892. — Lebert: Annales des ponts et chaussées 1892.

[2]) Reissner: Zeitschr. für Bauwesen 1899, S. 477 u. 1903, S. 135. Diesen Arbeiten sind auch die vorstehenden Literaturangaben entnommen. Vergl. ferner das Referat von Wieghardt in der Encykl. d. math. Wissenschaften, Bd. IV, Art. 29b.

[3]) Vergl. die Abschätzung bei **Reissner**, a. a. O. 1903, S. 151.

[4]) Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1898 S. 1436. Vergl. auch Stodola, Die Dampfturbinen, Berlin 1910, S. 301 und 630, wo das Verfahren zur Berechnung kritischer Umlaufzahlen verwandt wird und R. v. Mises, Monatsh. Math. Phys. 22, 1911, S. 33 bis 52, wo der Zusammenhang mit der Picardschen Methode sukzessiver Approximationen dargelegt wird.

I. Die Schwingungsgleichungen und ihre Auflösung.

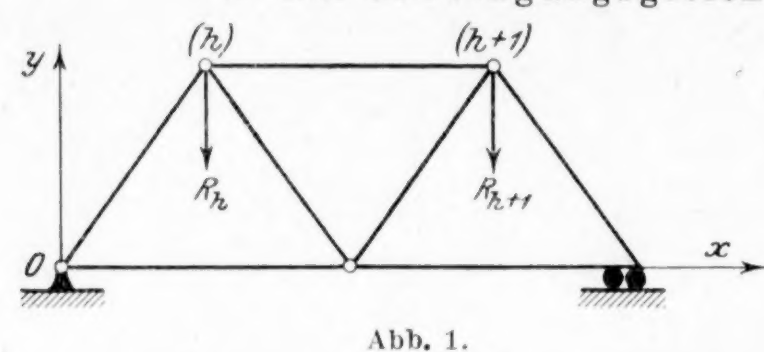


Abb. 1.

Wir betrachten ein ebenes und statisch bestimmtes Fachwerk, Abb. 1. Die Knotenpunkte sind vollkommene Gelenke; das eine Auflager ist fest und unverschiebbar, das andere ist ein reibungsfreies Gleitlager. Unter dem Einfluß der in den Knotenpunkten angreifenden und mit dem Fachwerke fest verbundenen Lasten R_h nimmt das Fachwerk einen eindeutig bestimmten Gleichgewichtszustand an, der in den Stäben die Kräfte $S^{(0)}$ erzeugt.

1. Die Stäbe bleiben bei der Schwingung annähernd geradlinig. Wir beschäftigen uns mit den kleinen Schwingungen, die das Fachwerk um diese statische Gleichgewichtslage auszuführen vermag. Jeder Stab des Fachwerkes gerät dabei in Biegungs- und Dehnungs-Schwingungen. Die damit verbundenen periodischen Verschiebungen $\mathfrak{W}_h$ der Knotenpunkte h des Fachwerkes lassen sich in der Form harmonischer Schwingungen von der Amplitude $\mathfrak{w}_h$ und der Phase t_h darstellen:

$$\mathfrak{W}_h = \mathfrak{w}_h \sin \lambda \sqrt{\frac{E g}{\gamma}} (t - t_h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

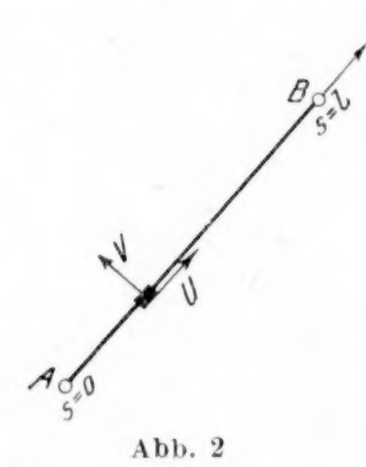


Abb. 2

Darin bedeutet E den Elastizitätsmodul, γ das spezifische Gewicht des Materials, aus dem das Fachwerk gebaut ist, g ist die Erdbeschleunigung, t die Zeit.

Wir betrachten nun zunächst einen einzelnen Stab, der vom Knotenpunkt A zum Knotenpunkt B führt und die Länge l hat. Entsprechend der Abb. 2 wählen wir seine Längsachse als s-Achse, und bezeichnen die Ausschläge der Stabelemente parallel und senkrecht zur s-Achse mit U und V. Die bei der Fachwerkschwingung eintretenden Verschiebungen $\mathfrak{W}_a$ und $\mathfrak{W}_b$ der Endpunkte unseres Stabes zerlegen wir ebenfalls in ihre Komponenten U_a, U_b, V_a, V_b. Dann müssen U und V die Randbedingungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned}
\text{für } s = o:\; U &= U_a = u_a \sin \lambda \sqrt{\frac{E g}{\gamma}} (t - t_a) \\
V &= V_a = v_a \sin \lambda \sqrt{\frac{E g}{\gamma}} (t - t_a); \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right)_{s=o} = 0 \\
\text{für } s = l:\; U &= U_b = u_b \sin \lambda \sqrt{\frac{E g}{\gamma}} (t - t_b) \\
V &= V_b = v_b \sin \lambda \sqrt{\frac{E g}{\gamma}} (t - t_b); \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right)_{s=l} = 0
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ferner müssen U und V den Differentialgleichungen für die Longitudinal- und Transversal-Schwingungen eines elastischen Stabes genügen. Diese lauten:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{für longitudinale Schwingungen: } \frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} \\
&\text{für transversale Schwingungen: } \frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = - E \varkappa^2 \frac{\partial^4 V}{\partial s^4}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

worin $\varkappa$ den Trägheitsradius des Querschnittes unseres Stabes bedeutet. Die Lösungen, die diese Differentialgleichungen und die angegebenen Randbedingungen erfüllen, sind:

$$\left.\begin{aligned}
U &= u_b \sin \lambda \sqrt{\frac{E g}{\gamma}} (t - t_b) \frac{\sin \lambda s}{\sin \lambda l} + u_a \sin \lambda \sqrt{\frac{E g}{\gamma}} (t - t_a) \frac{\sin \lambda (l - s)}{\sin \lambda l} \\
V &= {}^1/_2\, v_b \sin \lambda \sqrt{\frac{E g}{\gamma}} (t - t_b) \left\{ \frac{\sin s \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}}{\sin l \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}} + \frac{\operatorname{Sin} s \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}}{\operatorname{Sin} l \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}} \right\} \\
&+ {}^1/_2\, v_a \sin \lambda \sqrt{\frac{E g}{\gamma}} (t - t_a) \left\{ \frac{\sin (l - s) \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}}{\sin l \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}} + \frac{\operatorname{Sin} (l - s) \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}}{\operatorname{Sin} l \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}}} \right\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (4).$$

Indem wir die **dimensionslosen** Zahlen ε' und ε'' einführen:

$$\lambda\, l = \varepsilon' \qquad l \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa}} = \varepsilon''$$

und die Randbedingungen (Gl. 2) beachten, können wir U und V schreiben:

$$\left.\begin{aligned} U &= U_b \frac{\sin \varepsilon' \frac{s}{l}}{\sin \varepsilon'} + U_a \frac{\sin \varepsilon' \left(1 - \frac{s}{l}\right)}{\sin \varepsilon'} \\ V &= {}^1/_2\, V_b \left\{ \frac{\sin \varepsilon'' \frac{s}{l}}{\sin \varepsilon''} + \frac{\operatorname{Sin} \varepsilon'' \frac{s}{l}}{\operatorname{Sin} \varepsilon''} \right\} + {}^1/_2\, V_a \left\{ \frac{\sin \varepsilon'' \left(1 - \frac{s}{l}\right)}{\sin \varepsilon''} + \frac{\operatorname{Sin} \varepsilon'' \left(1 - \frac{s}{l}\right)}{\operatorname{Sin} \varepsilon''} \right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (6).$$

Bei einem Fachwerke müssen die Größen ε' und ε'' stets klein sein gegen π. Wäre nämlich ε' und ε'' gleich π, so bedeutete dies, daß die Frequenz der Eigenschwingung für diesen Stab gleich der Frequenz der Eigenschwingung des gesamten Fachwerkes wäre. Es würden dann Resonanzerscheinungen eintreten, die mit der Bausicherheit des Fachwerkes nicht verträglich wären. Tatsächlich liegen ε' und ε'' bei ausgeführten Fachwerken weit unter diesem Werte. Das von uns durchgerechnete Beispiel ergibt:

$$\varepsilon' = \lambda\, l = 0{,}55 \cdot 10^{-3}\, l, \text{ wobei } l \text{ in cm auszudrücken ist.}$$

Entwickeln wir daher U und V nach Potenzen von ε' und ε'':

$$\left.\begin{aligned} U = U_b \frac{s}{l} + U_a \left(1 - \frac{s}{l}\right) + \frac{\varepsilon'^2}{3!} \Big\{ & U_b \frac{s}{l} \left(1 - \left(\frac{s}{l}\right)^2\right) \\ & + U_a \left(1 - \frac{s}{l}\right)\left(1 - \left(1 - \frac{s}{l}\right)^2\right) \Big\} + \ldots \\ V = V_b \frac{s}{l} + V_a \left(1 - \frac{s}{l}\right) + \varepsilon''^4 \Big\{ & \ldots\ldots \Big\} + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (7),$$

so können wir uns zur Berechnung einer ersten Näherung für U und V auf die von ε' und ε'' freien Glieder beschränken und schreiben:

$$\left.\begin{aligned} U &= U_a + (U_b - U_a) \frac{s}{l} \\ V &= V_a + (V_b - V_a) \frac{s}{l} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Damit haben wir die bei einer kleinen Schwingung des Fachwerkes eintretenden Verschiebungen der Stabelemente in erster Näherung **linear** ausgedrückt durch die Verschiebungen der Endpunkte des Stabes und so den in der Überschrift ausgesprochenen Satz bewiesen. Dies reduziert die in Wirklichkeit unendlich große Zahl der Freiheitsgrade, die das Fachwerk beim Ausführen von Schwingungen hat, auf die endliche Zahl der dabei möglichen Knotenpunktsverschiebungen; das heißt: bei N Knotenpunkten unseres Fachwerkes auf $2\,N - 3$ Freiheitsgrade.

2. Aufstellung der Schwingungsgleichung für $2\,N - 3$ Freiheitsgrade. Für die weitere Rechnung wählen wir das feste Auflager unseres Fachwerkes als Koordinatenursprung O, Abb. 1. Die in der Ebene des Fachwerkes liegende Horizontale durch O dient uns als x-Achse, die Lotrechte durch O als y-Achse. Die bei einer Schwingung des Fachwerkes eintretenden Verschiebungen seiner Knotenpunkte zerlegen wir in Komponenten U_h, V_h pararallel zur x- und y-Achse. Wir führen das System der $2\,N - 3$ Werte U_h, V_h als allgemeine Koordinaten zur Beschreibung einer Schwingung unseres Fachwerkes ein. Zu ihrer Berechnung stehen uns die Lagrangeschen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\,t} \frac{\partial L}{\partial \dot{U}_h} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial U_h} \\ \frac{d}{d\,t} \frac{\partial L}{\partial \dot{V}_h} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial V_h} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

zur Verfügung, worin L die kinetische, Φ die potentielle Energie des schwingenden Fachwerkes ist. $\dot{U}_h$, $\dot{V}_h$ sind die Differentialquotienten von U_h, V_h nach der Zeit.

Für die Verschiebungen U, V der Stabelemente des von $h$ten zum $k$ten Knotenpunkte führenden Stabes gilt nach Gl. (8), wenn l_{hk} die Länge des Stabes ist:

$$\left.\begin{aligned} U &= U_h + (U_k - U_h) \frac{s}{l_{hk}} \\ V &= V_h + (V_k - V_h) \frac{s}{l_{hk}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Durch Differentiation nach der Zeit ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}\dot U &= \dot U_h + (\dot U_k - \dot U_h)\frac{s}{l_{hk}}\\ \dot V &= \dot V_h + (\dot V_k - \dot V_h)\frac{s}{l_{hk}}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11).$$

Ist nun F_{hk} der konstante Querschnitt des Stabes, so ist seine kinetische Energie L_{hk} bei einer Fachwerkschwingung:

$$L_{hk} = \frac{\gamma}{2\,g} F_{hk} \int_0^{l_{hk}} (\dot U^2 + \dot V^2)\, d\,s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

oder mit den Gl. (11)

$$L_{hk} = \frac{\gamma}{2\,g} F_{hk}\, l_{hk} \left\{ {}^1/_3\,(\dot U_k - \dot U_h)^2 + {}^1/_3\,(\dot V_k - \dot V_h)^2 + \dot U_k\,\dot U_h + \dot V_k\,\dot V_h \right\} \quad . \; (14).$$

Die gesamte kinetische Energie der Fachwerkschwingung erhalten wir durch Summierung der L_{hk} aller Stäbe. Dazu kommt noch die kinetische Energie, die mit der Bewegung der in den Knotenpunkten angreifenden Lasten R_h verbunden ist, so daß sich ergibt:

$$L = {}^1/_2 \sum_h \sum_k L_{hk} + \frac{1}{2\,g} \sum_h R_h\, \dot V_h^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14).$$

Wir berechnen daraus:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot U_h} &= \frac{\gamma}{g}\left\{ \dot U_h\, {}^1/_3 \sum_k F_{hk}\, l_{hk} + {}^1/_6 \sum_k \dot U_k\, F_{hk}\, l_{hk} \right\}\\ \frac{\partial L}{\partial \dot V_h} &= \frac{\gamma}{g}\left\{ \dot V_h \left({}^1/_3 \sum_k F_{hk}\, l_{hk} + \frac{R_h}{\gamma}\right) + {}^1/_6 \sum_k \dot V_k\, F_{hk}\, l_{hk} \right\}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (15)$$

und ferner:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \dot U_h} &= \frac{\gamma}{g}\left\{ \ddot U_h\, {}^1/_3 \sum_k F_{hk}\, l_{hk} + {}^1/_6 \sum_k \ddot U_k\, F_{hk}\, l_{hk} \right\}\\ \frac{d}{d\,t}\frac{\partial L}{\partial \dot V_h} &= \frac{\gamma}{g}\left\{ \ddot V_h \left({}^1/_3 \sum_k F_{hk}\, l_{hk} + \frac{R_h}{\gamma}\right) + {}^1/_6 \sum_k \ddot V_k\, F_{hk}\, l_{hk} \right\}\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (16).$$

Die Summen sind dabei über alle diejenigen Stäbe zu erstrecken, die vom $h$ten Knotenpunkte ausgehen.

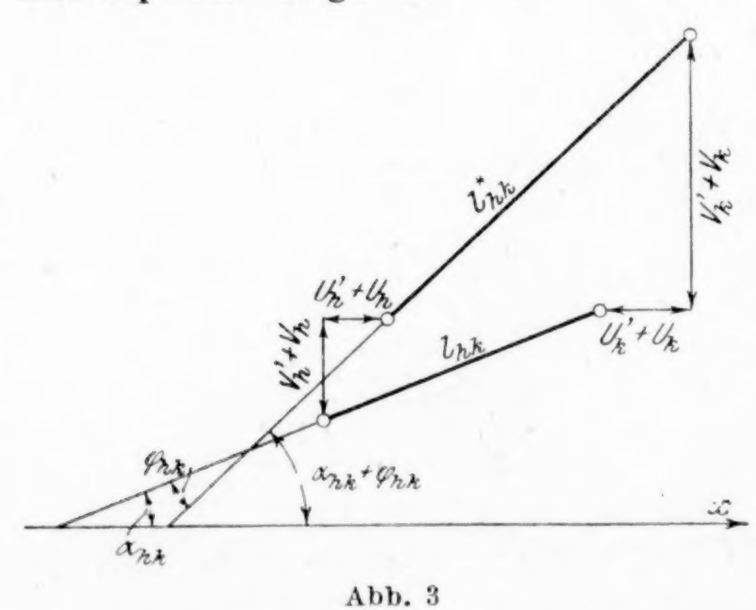


Abb. 3

Die potentielle Energie einer Fachwerkschwingung besteht aus der Formänderungsarbeit, die erforderlich ist zur Verschiebung der Knotenpunkte, vermehrt um die Arbeit, welche zur Verschiebung der äußeren Lasten aufgewendet werden muß. Da die potentielle Energie nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, setzen wir für den unbelasteten und ruhenden Zustand des Fachwerkes den Wert O der potentiellen Energie fest.

Für diesen Zustand des Fachwerkes nennen wir l_{hk} die Länge des vom $h$ten zum $k$ten Knotenpunkte führenden Stabes, α_{hk} seine Neigung gegen die x-Achse. Unter den Lasten R_h entstehen die Knotenpunktsverschiebungen U_h', V_h'. Zu diesen kommen infolge der Schwingungen die Verschiebungen U_h, V_h, so daß wir für die Länge l_{hk}^* des Stabes im schwingenden Fachwerke aus Abb. 3 ablesen:

$$l_{hk}^* = \sqrt{[l_{hk}\cos\alpha_{hk} + U_k' + U_k - U_h' - U_h]^2 + [l_{hk}\sin\alpha_{hk} + V_k' + V_k - V_h' - V_h]^2} \quad (17).$$

Die aufzuwendende Formänderungsarbeit, um l_{hk} in l_{hk}^* überzuführen, ist:

$$\Phi_{hk} = \frac{E}{2} F_{hk} \frac{(l_{hk}^* - l_{hk})^2}{l_{hk}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18).$$

Mit Berücksichtigung der Arbeit der äußeren Lasten R_h ergibt sich daher für die potentielle Energie der Fachwerkschwingung:

$$\Phi = {}^1/_2 \sum_h \sum_k \frac{E}{2} F_{hk} \frac{(l_{hk}^* - l_{hk})^2}{l_{hk}} + \sum R_h\, V_h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19).$$

Wir berechnen daraus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial U_h} &= {}^1/_2 \sum_h \sum_k E F_{hk} \frac{l_{hk}^* - l_{hk}}{l_{hk}} \frac{\partial l_{hk}^*}{\partial U_h} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial V_h} &= {}^1/_2 \sum_h \sum_k E F_{hk} \frac{l_{hk}^* - l_{hk}}{l_{hk}} \frac{\partial l_{hk}^*}{\partial V_h} + R_h \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Ist S_{hk} die Stabkraft, die durch die Verschiebungen $U_h' + U_h$, $V_h' + V_h$ und $U_k' + U_k$, $V_k' + V_k$ in dem Stabe von h nach k entsteht, so ist

$$S_{hk} = E F_{hk} \frac{l_{hk}^* - l_{hk}}{l_{hk}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21).$$

Wir können daher schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial U_h} &= {}^1/_2 \sum_h \sum_k S_{hk} \frac{\partial l_{hk}^*}{\partial U_h} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial V_h} &= {}^1/_2 \sum_h \sum_k S_{hk} \frac{\partial l_{hk}^*}{\partial V_h} + R_h \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Aus Abb. 3 ergibt sich, wenn φ_{hk} die Änderung von α_{hk} infolge der ruhenden Lasten R_h und infolge der Schwingungen bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial l_{hk}^*}{\partial U_h} &= -\frac{l_{hk}\cos\alpha_{hk} + U_k' + U_k - U_h' - U_h}{l_{hk}^*} = -\cos(\alpha_{hk} + \varphi_{hk}) = \frac{\partial l_{kh}^*}{\partial U_h} \\ \frac{\partial l_{hk}^*}{\partial V_h} &= -\frac{l_{hk}\sin\alpha_{hk} + V_k' + V_k - V_h' - V_h}{l_{hk}^*} = -\sin(\alpha_{hk} + \varphi_{hk}) = \frac{\partial l_{kh}^*}{\partial V_h} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (23).$$

Wir erhalten daher, wegen $S_{hk} = S_{kh}$ und $l_{hk} = l_{kh}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial U_h} &= \sum_k S_{hk} \cos(\alpha_{hk} + \varphi_{hk}) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial V_h} &= \sum_k S_{hk} \sin(\alpha_{hk} + \varphi_{hk}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24).$$

Dabei ist hinsichtlich des Vorzeichens zu beachten, daß für Zugbeanspruchung der Stäbe positives Vorzeichen, für Druckbeanspruchung negatives Vorzeichen für S_{hk} gewählt wurde. Die Summen über k sind über alle diejenigen Stäbe zu erstrecken, die vom $h$ten Knotenpunkte ausgehen.

In den Summen, Gl. (24), ist der Anteil, der von den Stabverdrehungen φ_{hk} herrührt, klein gegen die von φ_{hk} freien Teile. Wir lassen ihn deshalb weg, in Übereinstimmung mit der üblichen Fachwerkstatik, die bei der Berechnung der Stabkräfte auf die Formänderungen des Fachwerkes nicht eingeht. Mathematisch präzisieren wir unsere Vereinfachung dahin, daß wir — bei gegebenen äußeren Kräften — den Grenzfall $E = \infty$ betrachten. Damit wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial U_h} &= \sum_k S_{hk} \cos\alpha_{hk} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial V_h} &= \sum_k S_{hk} \sin\alpha_{hk} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25).$$

Führen wir noch die Zerlegung aus:

$$S_{hk} = S_{hk}^{(0)} + S_{hk}^{(1)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26),$$

worin $S_{hk}^{(0)}$ die Stabkräfte sind, die durch die Lasten R_h im ruhenden Fachwerke entstehen, so ist:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_k S_{hk}^{(0)} \cos\alpha_{hk} = 0 \\ &\sum_k S_{hk}^{(0)} \sin\alpha_{hk} + R_h = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27).$$

Wir erhalten daher schließlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial U_h} &= \sum_k S_{hk}^{(1)} \cos\alpha_{hk} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial V_h} &= \sum_k S_{hk}^{(1)} \sin\alpha_{hk} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

und

$$S_{hk}^{(1)} = \frac{E F_{hk}}{l_{hk}} \{(U_k - U_h)\cos\alpha_{hk} + (V_k - V_h)\sin\alpha_{hk}\} \quad \ldots \quad (29).$$

Die Lagrangeschen Gleichungen zur Berechnung der U_h, V_h lauten damit:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\gamma}{g}\left\{\ddot{U}_h \, {}^1\!/_3 \sum_k F_{hk}\, l_{hk} + {}^1\!/_6 \sum_k \ddot{U}_k\, F_{hk}\, l_{hk}\right\} = -E \sum_k \mathfrak{S}_{hk} \cos \alpha_{hk}\\
&\frac{\gamma}{g}\left\{\ddot{V}_h \left({}^1\!/_3 \sum_k F_{hk}\, l_{hk} + \frac{R_h}{\gamma}\right) + {}^1\!/_6 \sum_k \ddot{V}_k\, F_{hk}\, l_{hk}\right\} = -E \sum_k \mathfrak{S}_{hk} \sin \alpha_{hk}\\
&\mathfrak{S}_{hk} = \frac{F_{hk}}{l_{hk}}\left\{(U_k - U_h)\cos \alpha_{hk} + (V_k - V_h)\sin \alpha_{hk}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (30).$$

Indem wir uns hier auf die Berechnung der Eigenschwingung eines Fachwerkes beschränken, setzen wir an:

$$\left.\begin{aligned}
U_h &= u_h \sin \lambda \sqrt{\frac{E g}{\gamma}}\, t\\
V_h &= v_h \sin \lambda \sqrt{\frac{E g}{\gamma}}\, t
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31).$$

Damit gehen die Lagrangeschen Gleichungen in die $2N - 3$ linearen und homogenen Gleichungen über:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^2 \left\{u_h \, {}^1\!/_3 \sum_k F_{hk}\, l_{hk} + {}^1\!/_6 \sum_k u_k\, F_{hk}\, l_{hk}\right\} = \sum_k \mathfrak{s}_{hk} \cos \alpha_{hk}\\
&\lambda^2 \left\{v_h \left({}^1\!/_3 \sum_k F_{hk}\, l_{hk} + \frac{R_h}{\gamma}\right) + {}^1\!/_6 \sum_k v_k\, F_{hk}\, l_{hk}\right\} = \sum_k \mathfrak{s}_{hk} \sin \alpha_{hk}\\
&\mathfrak{s}_{hk} = \frac{F_{hk}}{l_{hk}}\left\{(u_k - u_h)\cos \alpha_{hk} + (v_k - v_h)\sin \alpha_{hk}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (32).$$

Aus diesem System können $2N - 3$ endliche Werte u_h, v_h — bis auf eine gemeinsame Verhältniszahl — dann und nur dann bestimmt werden, wenn λ^2 gleich einer der $2N - 3$ Wurzeln der Determinantengleichung des Systems ist.

3. Auflösung der Frequenzgleichung durch eine Näherungsfolge. Die Berechnung des kleinsten λ^2 und der zugehörigen Werte u_h, v_h führen wir auf folgendem Wege durch. Wir nehmen ein beliebiges System von Werten $\bar{u}_h$, $\bar{v}_h$ an und berechnen daraus:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{P}_h &= \bar{u}_h \, {}^1\!/_3 \sum_k F_{hk}\, l_{hk} + {}^1\!/_6 \sum_k \bar{u}_k\, F_{hk}\, l_{hk}\\
\bar{Q}_h &= \bar{v}_h \left({}^1\!/_3 \sum_k F_{hk}\, l_{hk} + \frac{R_h}{\gamma}\right) + {}^1\!/_6 \sum_k \bar{v}_k\, F_{hk}\, l_{hk}\\
\bar{\lambda}^2 &= 1 : \sqrt{\sum_h \bar{P}_h^2 + \sum_h \bar{Q}_h^2}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Dann bestimmen wir $\mathfrak{s}_{hk}'$ so, daß:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_k \mathfrak{s}_{hk}' \cos \alpha_{hk} &= \bar{\lambda}^2\, \bar{P}_h\\
\sum_k \mathfrak{s}_{hk}' \sin \alpha_{hk} &= \bar{\lambda}^2\, \bar{Q}_h
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34).$$

Die Berechnung der $\mathfrak{s}_{hk}'$ kann graphisch durch einen reziproken Kräfteplan geleistet werden. Denn die letzten Gleichungen für $\mathfrak{s}_{hk}'$ stimmen in ihrem Bau überein mit den Gleichungen, die in der Fachwerkstatik benutzt werden, um zu dem ruhenden System von Lasten $(\bar{\lambda}^2 \cdot \bar{P}_h,\ \bar{\lambda}^2 \cdot \bar{Q}_h)$ die Stabkräfte des Fachwerkes zu ermitteln. Diesen Stabkräften $\mathfrak{s}_{hk}'$ entspricht aber ein eindeutig bestimmtes System von Knotenpunktsverschiebungen u_h', v_h'. Wir finden u_h', v_h', indem wir mit den $\mathfrak{s}_{hk}'$ einen Williotschen Verschiebungsplan unseres Fachwerkes zeichnen.

Aus u_h', v_h' berechnen wir aufs Neue:

$$\left.\begin{aligned}
P_h' &= u_h' \, {}^1\!/_3 \sum_k F_{hk}\, l_{hk} + {}^1\!/_6 \sum_k F_{hk}\, l_{hk}\, u_k'\\
Q_h' &= v_h' \left({}^1\!/_3 \sum_k F_{hk}\, l_{hk} + \frac{R_h}{\gamma}\right) + {}^1\!/_6 \sum_k F_{hk}\, l_{hk}\, v_k'\\
\lambda'^2 &= 1 : \sqrt{\sum_h P_h'^2 + \sum_h Q_h'^2}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

und gewinnen aus einem zweiten Kräfteplan $\mathfrak{s}_{hk}''$, aus einem zweiten Verschiebungsplan u_h'', v_h''. Wir gelangen auf diese Weise zu den Folgen:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{u}_h,\ u_h',\ u_h'' \ \ldots\ u_h^{(n)}\\
&\bar{v}_h,\ v_h',\ v_h'' \ \ldots\ v_h^{(n)}\\
&\bar{\lambda},\ \lambda',\ \lambda'' \ \ldots\ \lambda^{(n)}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36).$$

Die Grenzwerte $u_h^{(I)}$, $v_h^{(I)}$, $\lambda^{(I)}$ dieser konvergenten Folgen stellen die Komponenten der Amplituden der Knotenpunktsverschiebungen und die Frequenz der ersten Hauptschwingung des Fachwerkes dar. Die Grenzwerte $\mathfrak{s}_{hk}^{(I)}$ der sich dabei gleichzeitig ergebenden $\mathfrak{s}_{hk}^{(n)}$, geben die Stabkräfte

$$S_{hk}^{(I)} = E\,\mathfrak{s}_{hk}^{(I)} \sin \lambda^{(I)} \sqrt{\frac{E\,g}{\gamma}}\,t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37),$$

die infolge der ersten Hauptschwingung entstehen.

Die Berechnung der übrigen Hauptschwingungen des Fachwerkes kann auf gleichem Wege geleistet werden. Vorher müssen jedoch die willkürlich angenommenen $\overline{u}_h$, $\overline{v}_h$ von den in ihnen enthaltenen Teilen der ersten Hauptschwingung befreit werden.

Das geschieht auf folgende Weise: Da die verschiedenen Hauptschwingungen voneinander unabhängig sind, kann z. B. das System der Stabkräfte $S_{hk}^{(I)}$, das der ersten Hauptschwingung entspricht, bei den Verschiebungen $\mathfrak{w}_h^{(II)}$ der zweiten Hauptschwingung mit den Komponenten $u_h^{(II)}$, $v_h^{(II)}$ keine Arbeit leisten. Demgemäß müssen wir auch die willkürlichen $\mathfrak{w}_h^{(II)}$ für die zweite Hauptschwingung der Bedingung unterwerfen, daß ihr skalares Produkt mit den Stabkräften der I. Hauptschwingung verschwindet:

$$\sum_h \sum_k \mathfrak{s}_{hk}^{(I)} \cdot \mathfrak{w}_h^{(II)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Für die dritte Hauptschwingung muß

$$\sum_h \sum_k \mathfrak{s}_{hk}^{(II)} \cdot \mathfrak{w}_h^{(III)} = \sum_h \sum_k \mathfrak{s}_{hk}^{(I)} \cdot \mathfrak{w}_h^{(III)} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

sein usw. (Siehe die nähere Begründung im zweiten Abschnitt.)

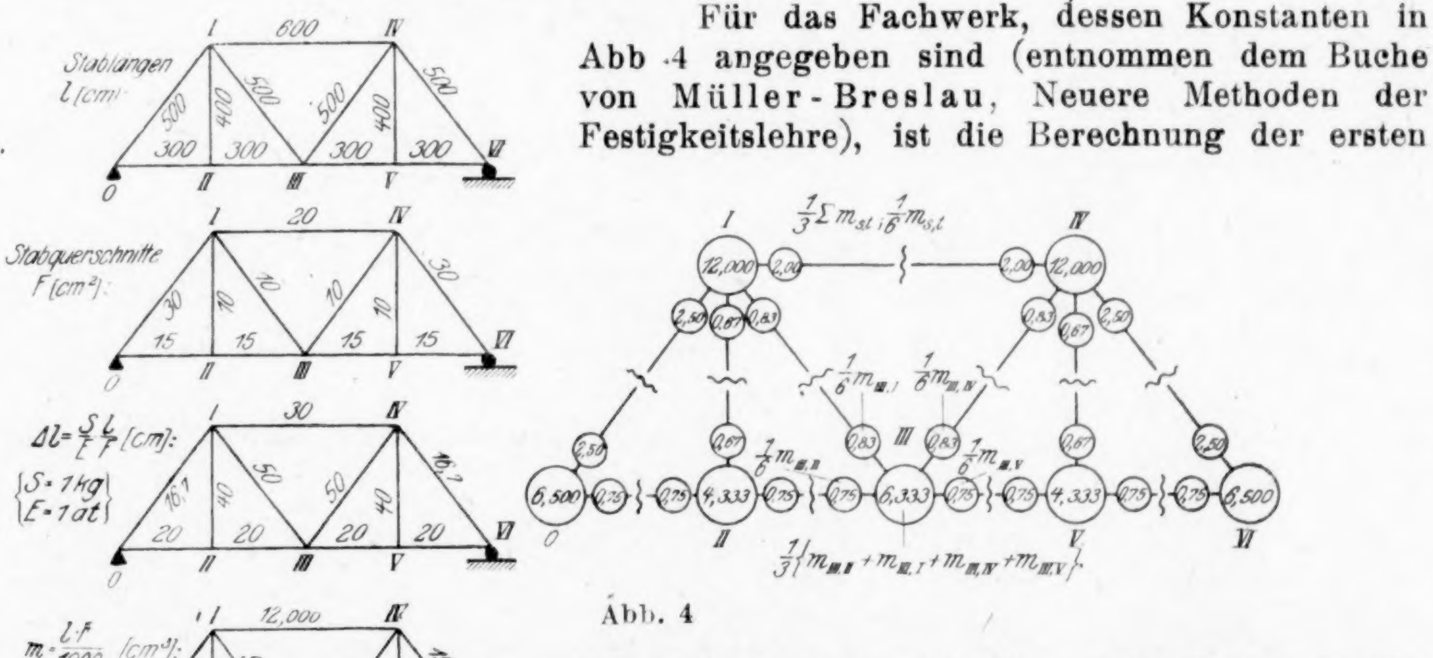


Abb. 4

Für das Fachwerk, dessen Konstanten in Abb. 4 angegeben sind (entnommen dem Buche von Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre), ist die Berechnung der ersten Eigenschwingung auf den beigefügten Tafeln S. 36—39 durchgeführt. Die Tafeln bedürfen nach dem Voranstehenden keiner besonderen Erläuterung mehr.

II. Analytische Formulierung des Verfahrens der Näherungsfolge. Konvergenzbeweis.

Das von uns angewandte Verfahren der fortschreitenden Näherung ist nicht auf das spezielle Problem der Fachwerkschwingungen beschränkt. Da sich die Rechnungen für den allgemeinen Fall einfacher schreiben lassen, betrachten wir ein beliebiges elastisches System, dessen Schwingungen durch die Koordinaten $Q(1)$ bis $Q(n)$ beschrieben werden.

Die kinetische Energie des Systems sei:

$$K = {}^1\!/_2 \sum_s \sum_t k(s,t)\,\dot{Q}(s)\,\dot{Q}(t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

die potentielle Energie:

$$P = {}^1\!/_2 \sum_s \sum_t p(s,t)\,Q(s)\,Q(t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

(Fortsetzung des Textes auf Seite 40.)

s	$^1/_3 \sum_t m_{s,t}$	$\overline{u}(s)$ [1]	$\overline{v}(s)$ [1]	$\frac{\overline{u}}{3} \sum_t m_{s,t}$	$\frac{\overline{v}}{3} \sum_t m_{s,t}$	t	$^1/_6\, m_{s,t}$	$\overline{u}(t)$ [1]	$\overline{v}(t)$ [1]	$\frac{\overline{u}}{6}\, m_{s,t}$	$\frac{\overline{v}}{6}\, m_{s,t}$	$10^{-3}\,\overline{P}$	$10^{-3}\,\overline{Q}$	$\overline{\lambda_1}^2\,\overline{P}$	$\overline{\lambda_1}^2\,\overline{Q}$
I	12,000	+ 26,8	− 32,2	+ 322	− 375	0 II III IV	2,50 0,67 0,83 2,00	0 + 7,5 + 15,0 + 4,2	0 − 32,2 − 80,0 − 32,5	0 + 5 + 12 + 8	0 − 22 − 66 − 65	+ 347	− 528	+ 0,304	− 0,462
II	4,333	+ 7,5	− 32,2	+ 32	− 139	0 I III	0,75 0,69 0,75	0 + 26,8 + 15,0	0 − 32,2 − 80,0	0 + 18 + 11	0 − 21 − 60	+ 61	− 220	+ 0,054	− 0,193
III	6,333	+ 15,0	− 80,0	+ 94	− 502	I II V IV	0,83 0,75 0,75 0,83	+ 26,8 + 7,5 + 22,5 + 4,2	− 32,2 − 32,2 − 32,5 − 32,5	+ 22 + 6 + 17 + 4	− 27 − 24 − 24 − 27	+ 143	− 604	+ 0,125	− 0,529
IV	12,000	+ 4,2	− 32,5	+ 50	− 390	I III V VI	2,00 0,83 0,67 2,50	+ 26,8 + 15,0 + 22,5 + 30,0	− 32,2 − 80,0 − 32,5 0	+ 54 + 12 + 15 + 75	− 64 − 66 − 22 0	+ 206	− 544	+ 0,181	− 0,476
V	4,333	+ 22,5	− 32,5	+ 97	− 140	III VI IV	0,75 0,75 0,75	+ 15,0 + 30,0 + 4,2	− 80,0 0 − 32,5	+ 11 + 22 + 3	− 60 0 − 25	+ 133	− 225	+ 0,117	− 0,197
VI	6,500	+ 30,0	—	+ 195	—	IV V	2,50 0,75	+ 4,2 + 22,5	— —	+ 11 + 17	— —	+ 223	—	+ 0,195	—

$$\sum_s \overline{P}^2 + \sum_s \overline{Q}^2 = 1{,}293 \cdot 10^{+12} \qquad \overline{\lambda_1}^4 = \frac{1}{\sum_s \overline{P}^2 + \sum_s \overline{Q}^2} = 0{,}77_3 \cdot 10^{-12} \qquad \overline{\lambda_1}^2 = 0{,}879 \cdot 10^{-6} \qquad \underline{\overline{\lambda_1} = 0{,}93_8 \cdot 10^{-3}}$$

1. Näherung.

$$10^{-3}\,\overline{P}(s) = \overline{u}(s)\,^1/_3 \sum_t m_{s,t} + {}^1/_6 \sum_t \overline{u}(t)\, m_{s,t}$$

$$10^{-3}\,\overline{Q}(s) = \overline{v}(s)\,^1/_3 \sum_t m_{s,t} + {}^1/_6 \sum_t \overline{v}(t)\, m_{s,t}$$

Knotenpunkt-Verschiebungen.

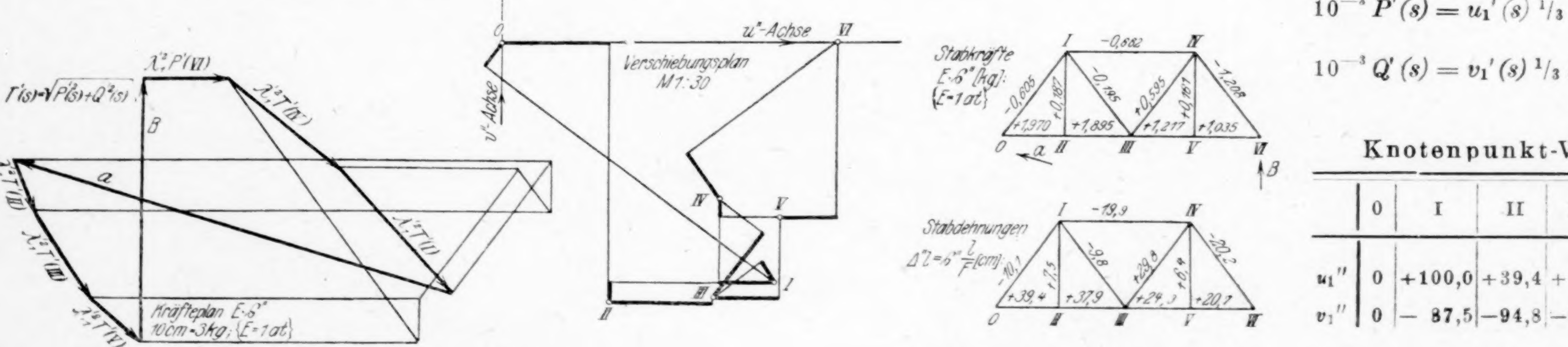
	0	I	II	III	IV	V	VI
u_1'	0	+ 81,2	+ 30,6	+ 60,3	+ 52,5	+ 82,8	+ 103,0
v_1'	0	− 81,0	− 88,5	− 105,0	− 67,0	− 74,5	0

[1]) Willkürlich angenommen. (Knotenpunktverschiebungen unter der vertikalen Last 1 kg im Knotenpunkt III.)

s	$\frac{1}{3}\sum_t m_{s,t}$	$u_1'(s)$	$v_1'(s)$	$\frac{u_1'}{3}\sum_t m_{s,t}$	$\frac{v_1'}{3}\sum m_{s,t}$	t	$\frac{1}{6} m_{s,t}$	$u_1'(t)$	$v_1'(t)$	$\frac{u_1'}{6} m_{s,t}$	$\frac{v_1'}{6} m_{s,t}$	$10^{-3}\dot{P}'$	$10^{-3} Q'$	$\lambda_1'^2 P'$	$\lambda_1'^2 Q'$
I	12,000	+ 81,2	− 81,0	+ 974	− 972	0	2,50	0	0	0	0	+ 1149	− 1252	+ 0,414	− 0,453
						II	0,67	+ 30,6	− 88,5	+ 20	− 59				
						III	0,83	+ 60,3	− 105,0	+ 50	− 87				
						IV	2,00	+ 52,5	− 67,0	+ 105	− 134				
II	4,333	+ 30,6	− 88,5	+ 132	− 383	0	0,75	0	0	0	0	+ 231	− 516	+ 0,083	− 0,187
						I	0,67	+ 81,2	− 81,0	+ 54	− 54				
						III	0,75	+ 60,3	− 105,0	+ 45	− 79				
III	6,333	+ 60,3	− 105,0	+ 382	− 633	I	0,83	+ 81,2	− 81,0	+ 67	− 67	+ 578	− 879	+ 0,209	− 0,317
						II	0,75	+ 30,6	− 88,5	+ 23	− 66				
						V	0,75	+ 82,8	− 74,5	+ 62	− 56				
						IV	0,83	+ 52,5	− 67,0	+ 44	− 57				
IV	12,000	+ 52,5	− 67,0	+ 630	− 803	I	2,00	+ 81,2	− 81,0	+ 162	− 162	+ 1154	− 902	+ 0,417	− 0,326
						III	0,83	+ 60,3	− 105,0	+ 50	− 87				
						V	0,67	+ 82,8	− 74,6	+ 55	− 50				
						VI	2,50	+ 103,0	0	+ 257	0				
V	4,333	+ 82,8	− 74,5	+ 358	− 322	III	0,75	+ 60,3	− 105,0	+ 45	− 79	+ 515	− 446	+ 0,185	− 0,161
						VI	0,75	+ 103,0	0	+ 77	0				
						IV	0,67	+ 52,5	− 67,0	+ 35	− 45				
VI	6,500	+ 103,0	—	+ 669	—	IV	2,50	+ 52,5	—	+ 131	—	+ 862	—	+ 0,311	—
						V	0,75	+ 82,8	—	+ 62	—				

$$\sum_s P'^2 + \sum_s Q'^2 = 7{,}66_7 \cdot 10^{+12} \qquad \lambda_1'^4 = \frac{1}{\sum_s P'^2 + \sum_s Q'^2} = 0{,}130_4 \cdot 10^{-12} \qquad \lambda_1'^2 = 0{,}36_1 \cdot 10^{-6} \qquad \underline{\lambda_1' = 0{,}60_1 \cdot 10^{-3}}$$

2. Näherung.



$$10^{-3} P'(s) = u_1'(s)\, {}^1/_3 \sum_t m_{s,t} + {}^1/_6 \sum_t u_1'(t)\, m_{s,t}$$

$$10^{-3} Q'(s) = v_1'(s)\, {}^1/_3 \sum_t m_{s,t} + {}^1/_6 \sum_t v_1'(t)\, m_{s,t}$$

Knotenpunkt-Verschiebungen.

	0	I	II	III	IV	V	VI
u_1''	0	+100,0	+39,4	+77,3	+79,5	+101,6	+122,3
v_1''	0	− 87,5	−94,8	−92,5	−57,2	− 63,5	0

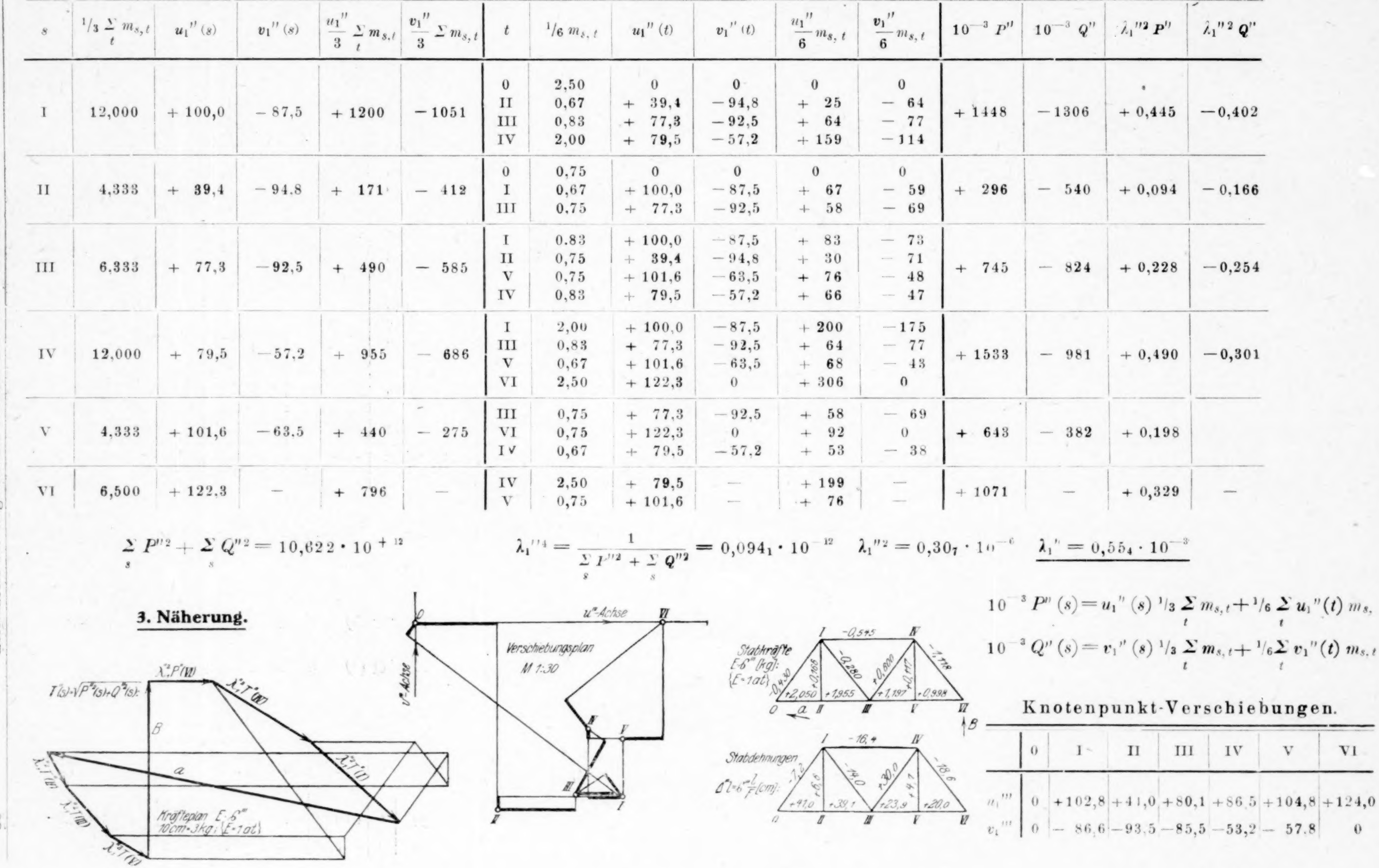
s	$^1/_3 \sum_t m_{s,t}$	$u_1''(s)$	$v_1''(s)$	$\frac{u_1''}{3}\sum_t m_{s,t}$	$\frac{v_1''}{3}\sum m_{s,t}$	t	$^1/_6 m_{s,t}$	$u_1''(t)$	$v_1''(t)$	$\frac{u_1''}{6} m_{s,t}$	$\frac{v_1''}{6} m_{s,t}$	$10^{-3} P''$	$10^{-3} Q''$	$\lambda_1''^2 P''$	$\lambda_1''^2 Q''$
I	12,000	+ 100,0	− 87,5	+ 1200	− 1051	0	2,50	0	0	0	0	+ 1448	− 1306	+ 0,445	− 0,402
						II	0,67	+ 39,4	− 94,8	+ 25	− 64				
						III	0,83	+ 77,3	− 92,5	+ 64	− 77				
						IV	2,00	+ 79,5	− 57,2	+ 159	− 114				
II	4,333	+ 39,4	− 94,8	+ 171	− 412	0	0,75	0	0	0	0	+ 296	− 540	+ 0,094	− 0,166
						I	0,67	+ 100,0	− 87,5	+ 67	− 59				
						III	0,75	+ 77,3	− 92,5	+ 58	− 69				
III	6,333	+ 77,3	− 92,5	+ 490	− 585	I	0,83	+ 100,0	− 87,5	+ 83	− 73	+ 745	− 824	+ 0,228	− 0,254
						II	0,75	+ 39,4	− 94,8	+ 30	− 71				
						V	0,75	+ 101,6	− 63,5	+ 76	− 48				
						IV	0,83	+ 79,5	− 57,2	+ 66	− 47				
IV	12,000	+ 79,5	− 57,2	+ 955	− 686	I	2,00	+ 100,0	− 87,5	+ 200	− 175	+ 1533	− 981	+ 0,490	− 0,301
						III	0,83	+ 77,3	− 92,5	+ 64	− 77				
						V	0,67	+ 101,6	− 63,5	+ 68	− 43				
						VI	2,50	+ 122,3	0	+ 306	0				
V	4,333	+ 101,6	− 63,5	+ 440	− 275	III	0,75	+ 77,3	− 92,5	+ 58	− 69	+ 643	− 382	+ 0,198	
						VI	0,75	+ 122,3	0	+ 92	0				
						IV	0,67	+ 79,5	− 57,2	+ 53	− 38				
VI	6,500	+ 122,3	—	+ 796	—	IV	2,50	+ 79,5	—	+ 199	—	+ 1071	—	+ 0,329	—
						V	0,75	+ 101,6	—	+ 76	—				

$$\sum_s P''^2 + \sum_s Q''^2 = 10{,}622 \cdot 10^{+12} \qquad \lambda_1''^4 = \frac{1}{\sum_s P''^2 + \sum_s Q''^2} = 0{,}094_1 \cdot 10^{-12} \qquad \lambda_1''^2 = 0{,}30_7 \cdot 10^{-6} \qquad \underline{\lambda_1'' = 0{,}55_4 \cdot 10^{-3}}$$

$$10^{-3} P''(s) = u_1''(s)\ ^1/_3 \sum_t m_{s,t} + {}^1/_6 \sum_t u_1''(t)\, m_{s,t}$$

$$10^{-3} Q''(s) = v_1''(s)\ ^1/_3 \sum_t m_{s,t} + {}^1/_6 \sum_t v_1''(t)\, m_{s,t}$$

3. Näherung.



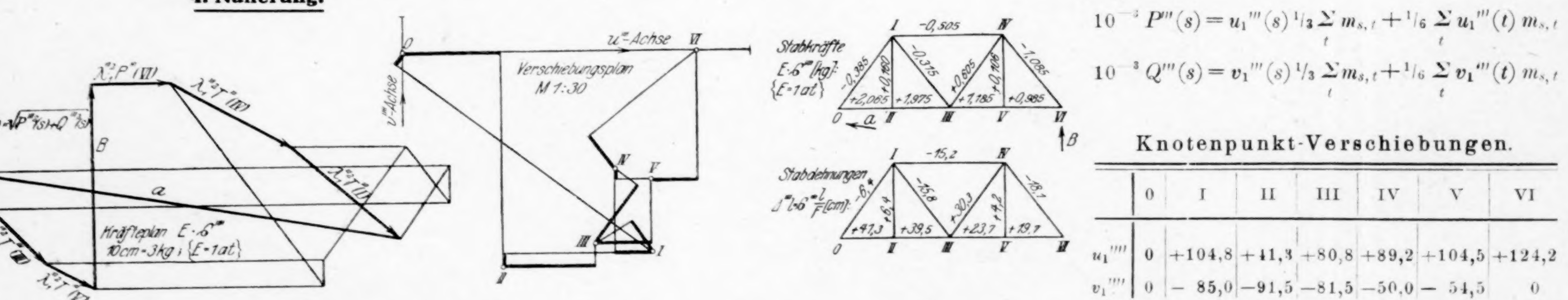
Knotenpunkt-Verschiebungen.

	0	I	II	III	IV	V	VI
u_1'''	0	+102,8	+41,0	+80,1	+86,5	+104,8	+124,0
v_1'''	0	− 86,6	−93,5	−85,5	−53,2	− 57,8	0

s	$^1/_6 \sum_t m_{s,t}$	$u_1'''(s)$	$v_1'''(s)$	$\frac{u_1'''}{6} \sum_t m_{s,t}$	$\frac{v_1'''}{6} \sum_t m_{s,t}$	t	$^1/_6\, m_{s,t}$	$u_1'''(t)$	$v_1'''(t)$	$\frac{u_1'''}{6} m_{s,t}$	$\frac{v_1'''}{6} m_{s,t}$	$10^{-3} P'''$	$10^{-3} Q'''$	$\lambda_1'''^2 P'''$	$\lambda_1'''^2 Q'''$
I	12,000	+ 102,8	− 86,6	+ 1235	− 1038	0	2,50	0	0	0	0	+ 1503	− 1278	+ 0,455	− 0,387
						II	0,67	+ 41,0	− 93,5	+ 28	− 63				
						III	0,83	+ 80,1	− 85,5	+ 67	− 71				
						IV	2,00	+ 86,5	− 53,2	+ 173	− 106				
II	4,333	+ 41,0	− 93,5	+ 178	− 405	0	0,75	0	0	0	0	+ 307	− 527	+ 0,093	− 0,160
						I	0,67	+ 102,8	− 86,6	+ 69	− 58				
						III	0,75	+ 80,1	− 85,5	+ 60	− 64				
III	6,333	+ 80,1	− 85,5	+ 507	− 541	I	0,83	+ 102,8	− 86,6	+ 85	− 72	+ 773	− 770	+ 0,234	− 0,233
						II	0,75	+ 41,0	− 93,5	+ 31	− 70				
						V	0,75	+ 104,0	− 57,8	+ 78	− 43				
						IV	0,83	+ 86,5	− 53,2	+ 72	− 44				
IV	12,000	+ 86,5	− 53,2	+ 1038	− 638	I	2,00	+ 102,8	− 86,6	+ 206	− 173	+ 1691	− 921	+ 0,513	− 0,279
						III	0,83	+ 80,1	− 85,5	+ 67	− 71				
						V	0,67	+ 104,0	− 57,8	+ 70	− 39				
						VI	2,50	+ 124,0	—	+ 310	0				
V	4,333	+ 104,8	− 57,8	+ 450	− 250	III	0,75	+ 80,1	− 85,5	+ 60	− 64	+ 661	− 350	+ 0,200	− 0,106
						VI	0,75	+ 124,0	0	+ 93	0				
						IV	0,67	+ 86,5	− 53,2	+ 58	− 36				
VI	6,500	+ 124,0	—	+ 806	—	IV	2,50	+ 86,5	—	+ 216	—	+ 1100	—	+ 0,333	—
						V	0,75	+ 104,0	—	+ 78	—				

$\sum_s P'''^2 + \sum_s Q'''^2 = 10{,}92 \cdot 10^{+12}$ $\lambda_1'''^4 = \frac{1}{\sum_s P'''^2 + \sum_s Q'''^2} = 0{,}091_6 \cdot 10^{-12}$ $\lambda_1'''^2 = 0{,}30_3 \cdot 10^{-6}$ $\underline{\underline{\lambda_1''' = 0{,}55_1 \cdot 10^{-3}}}$

4. Näherung.



$10^{-3} P'''(s) = u_1'''(s)\, ^1/_3 \sum_t m_{s,t} + ^1/_6 \sum_t u_1'''(t)\, m_{s,t}$

$10^{-3} Q'''(s) = v_1'''(s)\, ^1/_3 \sum_t m_{s,t} + ^1/_6 \sum_t v_1'''(t)\, m_{s,t}$

Knotenpunkt-Verschiebungen.

	0	I	II	III	IV	V	VI
u_1''''	0	+ 104,8	+ 41,3	+ 80,8	+ 89,2	+ 104,5	+ 124,2
v_1''''	0	− 85,0	− 91,5	− 81,5	− 50,0	− 54,5	0

Die Lagrangeschen Gleichungen lauten:

$$\sum_t k(s,t)\,\ddot{Q}(t) = -\sum_t p(s,t)\,Q(t) \quad \ldots \quad (3).$$

Durch den Ansatz:

$$Q_\nu(s) = q_\nu(s)\sin\lambda_\nu t \quad \ldots \quad (4)$$

gehen sie über in die linearen, homogenen Gleichungen:

$$\sum_t p(s,t)\,q_\nu(t) = \lambda_\nu^2 \sum_t k(s,t)\,q_\nu(t) \quad \ldots \quad (5).$$

Die zu den n-Werten für λ_ν^2 gehörigen Systeme:

$$\left.\begin{array}{l} q_1(1),\ q_1(2)\ \ldots\ldots\ q_1(n) \\ \vdots \\ q_\nu(1),\ q_\nu(2)\ \ldots\ldots\ q_\nu(n) \\ \vdots \\ q_n(1),\ q_n(2)\ \ldots\ldots\ q_n(n) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

sind die Hauptkoordinaten oder »Eigenfunktionen« des Gleichungssystems (5). Die λ_ν^2 bezeichnen wir als die »Eigenwerte«.

1. Orthogonalitätseigenschaften der $q_\nu(t)$. Wir beweisen zunächst in der üblichen Weise, daß die Eigenwerte λ^2 positiv und reell sind. Zu diesem Zweck multiplizieren wir die Gleichungen (5):

$$\sum_t p(s,t)\,q_\nu(t) = \lambda_\nu^2 \sum_t k(s,t)\,q_\nu(t) \quad \ldots \quad (5)$$

mit $q_\mu(s)$ und erhalten durch Summation:

$$\sum_s\sum_t p(s,t)\,q_\nu(t)\,q_\mu(s) = \lambda_\nu^2 \sum_s\sum_t k(s,t)\,q_\nu(t)\,q_\mu(s) \quad \ldots \quad (7).$$

Da sowohl K als P positiv-definite quadratische Formen sind, so folgt, daß die λ_ν^2 positiv sind, wenn sie reell sind. Die Realität folgt aus den Orthogonalitätseigenschaften der zu verschiedenen Eigenwerten λ_ν^2 und λ_μ^2 gehörigen Eigenfunktionen q_ν und q_μ.

Multiplizieren wir die Gleichungen (5) mit $q_\mu(s)$, so folgt durch Summierung:

$$\left.\begin{array}{rl} \sum_s\sum_t p(s,t)\,q_\nu(t)\,q_\mu(s) &= \lambda_\nu^2 \sum_s\sum_t k(s,t)\,q_\nu(t)\,q_\mu(s) \\ &= \lambda_\nu^2 \sum_s\sum_t k(s,t)\,q_\nu(s)\,q_\mu(t) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (8).$$

Nach Gl. (5) aber ist:

$$\sum_t k(s,t)\,q_\mu(t) = \frac{1}{\lambda_\mu^2}\sum_t p(s,t)\,q_\mu(t) \quad \ldots \quad (9).$$

Daher:

$$\left.\begin{array}{rl} \sum_s\sum_t p(s,t)\,q_\nu(t)\,q_\mu(s) &= \frac{\lambda_\nu^2}{\lambda_\mu^2}\sum_s\sum_t p(s,t)\,q_\nu(s)\,q_\mu(t) \\ &= \frac{\lambda_\nu^2}{\lambda_\mu^2}\sum_s\sum_t p(s,t)\,q_\nu(t)\,q_\mu(s) \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (10).$$

Dies ist aber für $\lambda_\nu^2 \neq \lambda_\mu^2$ nur möglich, wenn

$$\sum_s\sum_t p(s,t)\,q_\nu(t)\,q_\mu(s) = 0 \quad \text{für } \nu \neq \mu \quad \ldots \quad (11).$$

Auf gleiche Weise ergibt sich:

$$\sum_s\sum_t k(s,t)\,q_\nu(t)\,q_\mu(s) = 0 \quad \text{für } \nu \neq \mu \quad \ldots \quad (12).$$

Die Gleichung (11) hat eine einfache mechanische Bedeutung. Es ist

$$\frac{\partial P}{\partial q_\nu} = \sum_t p(s,t)\,q_\nu(t) \quad \ldots \quad (13),$$

die zur Koordinate q_ν gehörige verallgemeinerte Kraftkoordinate. Gl. (11) sagt also aus, daß die zum Eigenwert λ_ν^2 gehörigen Kraftkoordinaten keine Arbeit leisten, wenn das System die zum Eigenwerte λ_μ^2 gehörigen Verschiebungen $q_\mu(s)$ erfährt.

Da die Gleichungen (5) linear sind, so würde zu einem komplexen Eigenwert λ_ν^2 mit der komplexen Eigenfunktion $q_\nu = a_\nu + i\,b_\nu$ auch der konjugiert komplexe Eigenwert $\overline{\lambda_\nu}^2$ mit der konjugiert komplexen Eigenfunktion $\overline{q_\nu} = a_\nu - i\,b_\nu$ existieren. Da q_ν und $\overline{q}_\nu$ zu verschiedenen Eigenwerten gehören, so muß:

$$\sum_s \sum_t p(s,t)\, q_\nu(s)\, \overline{q_\nu}(t) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

sein, oder:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_s \sum_t p(s,t)\, a_\nu(s)\, a_\nu(t) + \sum_s \sum_t p(s,t)\, b_\nu(s)\, b_\nu(t) \\ + i\,\{\sum_s \sum_t p(s,t)\, a_\nu(s)\, b_\nu(t) - \sum_s \sum_t p(s,t)\, a_\nu(t)\, b_\nu(s)\} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (15).$$

Aus der Symmetrie von $p(s,t)$ folgt aber:

$$\sum_s \sum_t p(s,t)\, a_\nu(t)\, b_\nu(s) = \sum_s \sum_t p(s,t)\, a_\nu(s)\, b_\nu(t) \quad \ldots \ldots \quad (16),$$

so daß:

$$\sum_s \sum_t p(s,t)\, a_\nu(s)\, a_\nu(t) + \sum_s \sum_t p(s,t)\, b_\nu(s)\, b_\nu(t) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

sein müßte. Dies ist aber unmöglich, da die potentielle und kinetische Energie positiv-definite quadratische Formen sind. Daher kann λ_ν^2 nur reell sein.

2. Konvergenzbeweis. Zur Berechnung der $q_\nu(s)$ haben wir das System linearer und homogener Gleichungen aufzulösen:

$$\sum_t p(s,t)\, q_\nu(t) = \lambda_\nu^2 \sum_t k(s,t)\, q_\nu(t) \quad \ldots \ldots \quad (18).$$

Unser Verfahren zu ihrer Auflösung besteht in der Bildung der Funktionsreihe $\psi_0(s)$, $\psi_1(s)$ .... mit Hilfe der Gleichungen:

$$\sum_t p(s,t)\, \psi_{h+1}(t) = \sum_t k(s,t)\, \psi_h(t) \quad \ldots \ldots \quad (19).$$

Dabei kann man $\psi_0(s)$ willkürlich annehmen. Wegen der Orthogonalitätseigenschaften (11) der $q_\nu(t)$:

$$\sum_s \sum_t p(s,t)\, q_\nu(s)\, q_\mu(t) = 0, \quad \nu \neq \mu \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

ist es stets möglich, die Entwicklung zu bilden:

$$\psi_h(s) = c_1^{(h)} q_1(s) + c_2^{(h)} q_2(s) + \ldots .\, c_n^{(h)} q_n(s) \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Multipliziert man beide Seiten mit $p(s,t)\, q_r(t)$ und summiert über s und t, so erhält man:

$$\sum_s \sum_t p(s,t)\, \psi_h(s)\, q_r(t) = c_r^{(h)} \sum_s \sum_t p(s,t)\, q_r(s)\, q_r(t) \quad \ldots \ldots \quad (21).$$

Durch Multiplikation mit $k(s,t)\, q_r(t)$ und Summierung über s und t ergibt sich ebenso:

$$\sum_s \sum_t k(s,t)\, \psi_h(s)\, q_r(t) = c_r^{(h)} \sum_s \sum_t k(s,t)\, q_r(s)\, q_r(t) \quad \ldots \ldots \quad (22).$$

Da ferner wegen Gl. (5):

$$\sum_s \sum_t p(s,t)\, \psi_h(s)\, q_r(t) = \lambda_r^2 \sum_s \sum_t k(s,t)\, \psi_h(s)\, q_r(t) \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

und wegen Gl. (7):

$$\sum_s \sum_t p(s,t)\, q_r(s)\, q_r(t) = \lambda_r^2 \sum_s \sum_t k(s,t)\, q_r(s)\, q_r(t) \quad \ldots \ldots \quad (24),$$

so ergibt sich:

$$\frac{\sum_s \sum_t p(s,t)\, \psi_h(s)\, q_r(t)}{\sum_s \sum_t p(s,t)\, q_r(s)\, q_r(t)} = \frac{\sum_s \sum_t k(s,t)\, \psi_h(s)\, q_r(t)}{\sum_s \sum_t k(s,t)\, q_r(s)\, q_r(t)} = c_r^{(h)} \quad \ldots \ldots \quad (25).$$

Um aus der Entwicklung (20) für $\psi_h(s)$ die entsprechende Entwicklung für $\psi_{h+1}(s)$ zu erhalten, multiplizieren wir Gl. (19) mit $q_r(s)$ und summieren über s. Dies ergibt:

$$\sum_s \sum_t p(s,t)\, \psi_{h+1}(t)\, q_r(s) = \sum_s \sum_t k(s,t)\, \psi_h(t)\, q_r(s) \quad \ldots \ldots \quad (26).$$

Durch Vertauschung von s und t und Division durch (7) folgt daraus:

$$\frac{\sum_s \sum_t p(s,t)\, \psi_{h+1}(s)\, q_r(t)}{\sum_s \sum_t p(s,t)\, q_r(s)\, q_r(t)} = \frac{1}{\lambda_r^2} \frac{\sum_s \sum_t k(s,t)\, \psi_{h+1}(s)\, q_r(t)}{\sum_s \sum_t k(s,t)\, q_r(t)\, q_r(s)} \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

oder wegen Gl. (25):

$$c_r^{(h+1)} = \frac{c_r^{(h)}}{\lambda_r^2} \quad \ldots \ldots \quad (28).$$

Lautet also die Entwicklung unseres willkürlichen

$$\psi_0(s) = c_1\, q_1(s) + c_2\, q_2(s) + \ldots . + c_n\, q_n(s) \quad \ldots \ldots \quad (29),$$

so lautet die Entwicklung für $\psi_h(s)$:

$$\psi_h(s) = \frac{c_1}{\lambda_1^{2h}} q_1(s) + \frac{c_2}{\lambda_2^{2h}} q_2(s) + \ldots . + \frac{c_n}{\lambda_n^{2h}} q_n(s) \quad \ldots \ldots \quad (30).$$

Gehen wir daher zur Grenze $h = \infty$, d. h. wiederholen wir unsern Näherungsprozeß hinreichend oft, so erhalten wir, da $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_n$ ist:

$$\lim_{h=\infty} \lambda_1^{2h}\, \psi_h(s) = c_1\, q_1(s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

und daher:

$$\lambda_1^2 = \lim_{h=\infty} \frac{\sum_s \sum_t p(s,t)\, \psi_h(s)\, \psi_h(t)}{\sum_s \sum_t k(s,t)\, \psi_h(s)\, \psi_h(t)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32).$$

Die zweite Eigenschwingung ergibt sich, indem unser Verfahren eingeleitet wird durch ein System, dessen Entwicklung nach den Eigenfunktionen die erste Eigenfunktion nicht mehr enthält. Das kann immer dadurch erreicht werden, daß wir von einem willkürlichen $\psi_0(s)$ ein Glied $c_1\, q_1(s)$ abziehen, dessen Koeffzient

$$c_1 = \frac{\sum_s \sum_t p(s,t)\, \psi_0(s)\, q_1(t)}{\sum_s \sum_t p(s,t)\, q_1(s)\, q_1(t)}$$

ist. Auf demselben Wege erhält man auch die höheren Eigenschwingungen.

Schlußbemerkung. Im Interesse der einfachen Darstellung haben wir uns auf ebene und statisch bestimmte Fachwerke beschränkt. Die beigefügten Tafeln bringen hierzu als Beispiel die Berechnung der ersten Eigenschwingung eines einfachen Fachwerkes; man ersieht aus ihnen die außerordentlich rasche Konvergenz unseres Verfahrens, das in unserm Beispiel bereits in der dritten Näherung für die praktische Anwendung vollständig genügende Genauigkeit liefert. Die Brauchbarkeit unseres Verfahrens ist jedoch durchaus nicht auf derartige einfache Fachwerke beschränkt. Es läßt sich im Gegenteil sogar zeigen, daß seine Konvergenz um so besser wird, je größer die Ausdehnung des Fachwerkes in einer Richtung ist.

Die Erweiterung unseres Verfahrens auf statisch unbestimmte und räumliche Fachwerke und seine Anwendung zur Darstellung der erzwungenen Schwingungen in einem Fachwerke werden den Gegenstand weiterer Untersuchungen bilden. 2

Über ein Problem der Stromleitung.

Von **L. LICHTENSTEIN** in Berlin.

In den folgenden Zeilen wird auf ein Problem der Stromleitung hingewiesen, das mathematisch nicht ganz ohne Interesse ist und das auch vom Standpunkt der Anwendungen einige Beachtung verdient.

Ein Pol einer Gleichspannungsquelle, etwa eines Gleichstromgenerators, sei an einen langen, horizontal ausgespannten Leiter angeschlossen, der andere Pol sei geerdet. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß der Leiter, der die Gestalt eines langgestreckten Zylinders haben soll, von der Erde vollkommen isoliert ist. Er ist alsdann Sitz einer elektrischen Ladung; eine entgegengesetzt gleiche Ladung sitzt auf der Erdoberfläche oder in deren Nähe. Die Verteilung dieser Ladung hängt von den geometrischen und physikalischen Eigenschaften der dem Leiter zunächst liegenden Erdschichten ab; sie wird insbesondere von etwaigen Metallmassen in der Nähe der Erdoberfläche merklich beeinflußt.

Liegt statt einer Gleichstromquelle ein Wechselstromerzeuger vor, so sind die auf dem Leiter einerseits, auf bezw. in der Nähe der Erdoberfläche anderseits verteilten Ladungen nunmehr Funktionen der Zeit. Offenbar müssen jetzt der Erde Ladungen periodisch zugeführt, bezw. von dieser abgeführt werden. In der Erde bildet sich eine Strömung aus; diese Erdströmung ist zu bestimmen. In der Praxis wird man natürlich nicht absichtlich einen Pol eines Wechselstromgenerators an Erde, den andern an einen Freileitungsdraht legen. Die Verhältnisse liegen indessen, wie sich ohne Schwierigkeiten zeigen läßt, ähnlich, wenn ein Draht einer Wechselstrom- oder Drehstromfreileitungsanlage einen einseitigen (und einpunktigen) Erdschluß hat.

1. Problemstellung. Ansatz für das Potential. Wir nehmen an, daß der Boden in der Umgebung der Freileitung von ausgedehnten Metallmassen (Rohrleitungen, Gleisanlagen usw.) frei ist, und vereinfachen das Problem, indem wir für die Erde einen homogenen, leitenden Halbraum substituieren. Die wesentlichen Züge des wirklichen Vor-

ganges bleiben dabei erhalten, während das Problem der mathematischen Behandlung zugänglicher wird. Wir beginnen mit der Bestimmung der elektrischen Verteilung bei Gleichspannung, der Uebergang zur Wechselspannung wird sich später mühelos vollziehen. Für den langgestreckten Leiter führen wir zunächst ein Stück einer mit homogener Ladung belegten Geraden ein.

Wir beziehen die Lage der Punkte im Raume auf ein kartesisches Koordinatensystem, dessen x-y-Ebene mit der Grenzebene des leitenden Halbraumes zusammenfällt. Die mit Elektrizität belegte geradlinige Strecke AB möge die z-Achse schneiden. Wir nehmen sie um h von der x-y-Ebene entfernt und der x Achse parallel, mithin horizontal, an (Abb. 1). Ihre Länge sei $2l$, die Koordinaten der Endpunkte seien $A(-l, o, h)$, $B(l, o, h)$. Die Ladung für die Längeneinheit sei q, alle Größen im elektrostatischen Maßsystem ($c\,g\,s$) ausgedrückt.

Abb. 1

Es sei $A'B'$ das Spiegelbild von AB in bezug auf die Ebene $z = 0$. Denken wir uns $A'B'$ mit einer gleichmäßig verteilten elektrischen Ladung von der Dichte $-q$ bedeckt und betrachten wir das elektrische Feld der beiden Geraden AB und $A'B'$. Sei in der üblichen Bezeichnungsweise $\mathfrak{E}$ die Feldintensität. Bekanntlich sind die Niveauflächen einer homogenen, geladenen Strecke gestreckte Rotationsellipsoide und die Endpunkte der geladenen Geraden sind Brennpunkte ihrer Meridianellipsen. Die in der Umgebung der Rotationsachse verlaufenden Niveauflächen werden sich bei hinreichend großem l nur wenig von Kreiszylindern mit abgerundeten Basiskanten unterscheiden. Das gleiche gilt, auch wenn es sich, wie in unserm Falle, um das Feld zweier mit gleichmäßig verteilter Ladung belegten Geraden handelt. Sei S eine Niveaufläche in der Nachbarschaft von AB. Aus Gründen der Symmetrie ist auch die Ebene $z = 0$ eine Niveaufläche; sie heiße S_0. Sei jetzt T der von S_0 und S begrenzte Raum, ν die nach außen gerichtete Normale an S_0 oder S.

Nach bekannten Sätzen ist in T das Feld $\mathfrak{E}$ zugleich dasjenige Feld, das sich ergibt, wenn man auf S_0 und S eine elektrische Massenverteilung von der Dichte $\delta = -\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_\nu$ annimmt. Sei (ξ, η, ζ) ein Punkt außerhalb von AB und $A'B'$ ($\eta \neq h$, $\eta \neq -h$) Das Feld leitet sich von einem Potential ab,

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = q\int_{-l}^{l}\frac{dx}{r} - q\int_{-l}^{l}\frac{dx}{r'},\ r^2 = (\xi - x)^2 + \eta^2 + (\zeta - h)^2,\ r'^2 = (\xi - x)^2 + \eta^2 + (\zeta + h)^2 \quad (1).$$

In bekannter Weise ist nun

$$\left.\begin{aligned}\int_{-l}^{l}\frac{dx}{r} &= \int_{-l}^{l}\frac{d(x-\xi)}{\sqrt{(\xi-x)^2+\eta^2+(\zeta-h)^2}} = \left[\log\left(x-\xi+\sqrt{(\xi-x)^2+\eta^2+(\zeta-h)^2}\right)\right]_{-l}^{l}\\ &= \log\frac{l-\xi+\sqrt{(\xi-l)^2+\eta^2+(\zeta-h)^2}}{-(l+\xi)+\sqrt{(\xi+l)^2+\eta^2+(\zeta-h)^2}},\\ \int_{-l}^{l}\frac{dx}{r'} &= \log\frac{l-\xi+\sqrt{(\xi-l)^2+\eta^2+(\zeta+h)^2}}{-(l+\xi)+\sqrt{(\xi+l)^2+\eta^2+(\zeta+h)^2}},\end{aligned}\right\} \quad (2),$$

demnach

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = q\log\left\{\frac{\left(-(l+\xi)+\sqrt{(l+\xi)^2+\eta^2+(\zeta+h)^2}\right)\left(l-\xi+\sqrt{(l-\xi)^2+\eta^2+(\zeta-h)^2}\right)}{\left(l-\xi+\sqrt{(l-\xi)^2+\eta^2+(\zeta+h)^2}\right)\left(-(l+\xi)+\sqrt{(l+\xi)^2+\eta^2+(\zeta-h)^2}\right)}\right\}. \quad (3)$$

Augenscheinlich ist in der Tat die Ebene $\zeta = 0$ eine Niveaufläche.

Sei ϱ der Abstand des Punktes (ξ, η, ζ) von der Geraden AB,

$$\varrho^2 = \eta^2 + (\zeta - h)^2,$$

ϱ' ensprechend der Abstand von $A'B'$,

$$\varrho'^2 = \eta^2 + (\zeta + h)^2.$$

Für Gl. (3) **kann man einfacher setzen:**

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = q \log \frac{\left(-(l+\xi) + \sqrt{(l+\xi)^2 + \varrho'^2}\right)\left(l - \xi + \sqrt{(l-\xi)^2 + \varrho^2}\right)}{\left(l - \xi + \sqrt{(l-\xi)^2 + \varrho'^2}\right)\left(-(l+\xi) + \sqrt{(l+\xi)^2 + \varrho^2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Für diejenigen Punkte *in der Umgebung von* AB, **die von** A **und** B **um ein Vielfaches von** $2h$ **entfernt sind, läßt sich** $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ **in eine rasch konvergierende Reihe entwickeln.** Sei

$$\left|\frac{\varrho}{l-\xi}\right|, \quad \left|\frac{\varrho'}{l-\xi}\right|, \quad \left|\frac{\varrho}{l+\xi}\right|, \quad \left|\frac{\varrho'}{l+\xi}\right| < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wenn wir uns auf die Betrachtung der Punkte beschränken, die zwischen den Ebenen $\xi = -l$ **und** $\xi = l$ **liegen, für die demnach**

$$l - \xi > 0, \quad l + \xi > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

ist, so gilt

$$l - \xi + \sqrt{(\xi - l)^2 + \varrho'^2} = (l - \xi)\left(1 + 1 + {}^1/_2 \frac{\varrho'^2}{(l-\xi)^2} + \ldots\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

mithin

$$\left.\begin{aligned}
\varphi'(\xi,\eta,\zeta) &= q \log \frac{(l+\xi)\left(-1 + 1 + {}^1/_2 \frac{\varrho'^2}{(l+\xi)^2} - {}^1/_8 \frac{\varrho'^4}{(l+\xi)^4} + \ldots\right)(l-\xi)\left(2 + {}^1/_2 \frac{\varrho^2}{(l-\xi)^2} - {}^1/_8 \frac{\varrho^4}{(l-\xi)^4} + \ldots\right)}{(l-\xi)\left(2 + {}^1/_2 \frac{\varrho'^2}{(l-\xi)^2} - {}^1/_8 \frac{\varrho'^4}{(l-\xi)^4} + \ldots\right)(l+\xi)\left(-1 + 1 + {}^1/_2 \frac{\varrho^2}{(l+\xi)^2} - {}^1/_8 \frac{\varrho^4}{(l+\xi)^4} + \ldots\right)} \\
&= q\left[- {}^1/_4 \frac{\varrho'^2}{(l-\xi)^2} + \frac{3}{32} \frac{\varrho'^4}{(l-\xi)^4} - \ldots + {}^1/_4 \frac{\varrho^2}{(l-\xi)^2} - \frac{3}{32} \frac{\varrho^4}{(l-\xi)^4} + \ldots\right] \\
&+ q \log \frac{\varrho'^2}{\varrho^2}\left(\frac{1 - {}^1/_4 \frac{\varrho'^2}{(l+\xi)^2} + \ldots}{1 - {}^1/_4 \frac{\varrho^2}{(l+\xi)^2} + \ldots}\right) = 2 q \log \frac{\varrho'}{\varrho} + q\left(- {}^1/_4 \frac{\varrho'^2}{(l+\xi)^2} - \frac{\varrho'^2}{4(l-\xi)^2} + {}^1/_4 \frac{\varrho^2}{(l+\xi)^2}\right. \\
&\left. + {}^1/_4 \frac{\varrho^2}{(l-\xi)^2} + \ldots\right) = 2q \log \frac{\varrho'}{\varrho} + q \frac{(\varrho^2 \quad \varrho'^2)}{4}\left(\frac{1}{(l+\xi)^2} + \frac{1}{(l-\xi)^2}\right) + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (8).$$

Die nicht mehr hingeschriebenen Glieder sind von der vierten und höheren Ordnung in bezug auf $\frac{\varrho}{l+\xi}, \frac{\varrho'}{l+\xi}, \frac{\varrho}{l-\xi}, \frac{\varrho'}{l-\xi}$.

Der Quotient $\frac{h}{l}$ **ist in der Regel ein kleiner Bruch. Legt man der Betrachtung eine in** $h = 6$ **m Höhe über dem Erdboden ausgespannte Leitung zugrunde und nimmt man** $l = 6$ **km, mithin die Gesamtlänge der Leitung gleich** 12 **km an, so wird**

$$\frac{h}{l} = 0{,}001, \quad \frac{\varrho'}{l} \text{ wenig verschieden von } 0{,}002 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Es sei

$$\frac{\varrho'}{l-\xi} \leqq {}^1/_3, \quad \frac{\varrho'}{l+\xi} \leqq {}^1/_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

demnach

$$l - \xi \geqq 36 \text{ m}, \quad l + \xi \geqq 36 \text{ m}.$$

Das bedeutet, wie man leicht sieht, daß man sich auf die Betrachtung der zwischen den Ebenen $\xi = -l + 36$, $\xi = l - 36$ **enthaltenen Punkte beschränkt. Ihre Entfernung von den Endpunkten** A **und** B **der Freileitung ist mindestens gleich 36 m. Setzt man ferner** $\varrho = 0{,}6$ **cm, was einem Runddraht von etwa 113 mm² entsprechen würde, so findet man angenähert**

$$2 \log \frac{\varrho'}{\varrho} = 2 \log \frac{1200}{0{,}6} = 15{,}2 \ldots, \quad \frac{\varrho'^2}{4(l-\xi)^2} \leqq \frac{1}{36} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Das zweite Glied der Entwicklung (8) **macht noch nicht** 0,2 **vH des ersten Gliedes aus. Bis nahe an die Endpunkte der Freileitung ist das Feld in der Umgebung des Drahtes praktisch gleich demjenigen zweier unbegrenzter Geraden** $\zeta = h$, $\zeta = -h$, **die entsprechend die Ladung** q **und** $-q$ **für die Längeneinheit tragen. Die Niveauflächen**

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{q}{C},$$

unter C **eine hinreichend kleine positive Zahl verstanden, unterscheiden sich nur sehr wenig von geraden Kreiszylindern, deren Achsen die Richtung der** x**-Achse haben und**

in der Nähe von AB verlaufen. Das trifft, wie wir soeben gesehen haben, bereits mit großer Annäherung zu, wenn man $C = \frac{1}{15{,}2}$ annimmt.

2. Ladungsverteilung auf der Erdoberfläche. Wir denken uns jetzt die Niveaufläche $S\left(\varphi = \frac{q}{C}\right)$ und die x-y-Ebene S_0 metallisch leitend. Auf den beiden Flächen hat man alsdann, wie bereits erwähnt, eine elektrische Massenverteilung von der Dichte $= -\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_\nu$ anzunehmen. Die Verteilung der Elekrizität auf S interessiert uns nicht. Aus allgemeinen Sätzen weiß man, daß die Gesamtladung auf S derjenigen der Geraden AB gleich sein muß. Sie beträgt demnach $2\,q\,l$. Eine entgegengesetzt gleiche Ladung ist auf der Erdoberfläche S_0 verteilt. Die Kapazität des Kondensators, der aus dem im wesentlichen zylindrischen Leiter S und der Erde gebildet wird, ist augenscheinlich gleich

$$\frac{2\,q\,l\,C}{q} = 2\,l\,C \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Die Kapazität für die Längeneinheit ist dementsprechend C.

Der Leiter S ist, wie gesagt, von einem geraden Kreiszylinder nur wenig verschieden. Sei r_0 der Halbmesser eines Kreises, der der Schnittfläche von S mit der Ebene $x = 0$ inhaltsgleich ist. Bis auf einen Betrag von der Ordnung $\frac{r_0}{h}$ ist $\frac{\varrho'}{\varrho}$ auf S für $x = 0$ gleich $\frac{2h}{r_0}$,

$$\log\frac{\varrho'}{\varrho} = \log\frac{2h}{r_0} + \left(\left(\frac{r_0}{h}\right)\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13).$$

Im vorliegenden Falle ist

$$\log\frac{2h}{r_0} = 7{,}6 \ldots \quad \frac{r_0}{h} = \frac{0{,}6}{600} = 0{,}001.$$

Mit einem praktisch völlig belanglosen Fehler kann man demnach $\frac{\varrho'}{\varrho}$ durch $\frac{2h}{r}$ ersetzen. Man erhält so

$$\frac{1}{C} = 2\log\frac{2h}{r} + \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

und als die Kapazität für die Längeneinheit angenähert den bekannten Ausdruck

$$\frac{1}{2\log\frac{2h}{r}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Ist die Gleichspannung des Drahtes gegen Erde E, so findet man nunmehr für die Ladung für die Längeneinheit der Leitung mit hinreichender Annäherung den Wert

$$q = EC = \frac{E}{2\log\frac{2h}{r}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

Nun die Verteilung der Ladung auf der Erdoberfläche. Hier ist

$$\delta = -\frac{1}{4\pi}\mathfrak{E}_\nu = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\varphi(\xi,\eta,\zeta)\right]_{\zeta=0} \quad \ldots \quad (17),$$

demnach wegen Gl. (4) nach einer leichten Umrechnung

$$\delta = -\frac{qh}{2\pi}\Bigg[\frac{1}{-(l+\xi)+\sqrt{(\xi+l)^2+\eta^2+h^2}} \quad \frac{1}{\sqrt{(\xi+l)^2+\eta^2+h^2}}$$
$$-\frac{1}{(l-\xi)+\sqrt{(\xi-l)^2+\eta^2+h^2}} \quad \frac{1}{\sqrt{(\xi-l)^2+\eta^2+h^2}}\Bigg] \quad (18).$$

Werden jetzt unter ϱ und ϱ' die Abstände eines Punktes $\xi, \eta, 0$ auf S von den beiden geladenen Geraden verstanden, so gilt

$$\varrho^2 = \varrho'^2 = \eta^2 + h^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19),$$

demnach

$$\delta = -\frac{qh}{2\pi}\left[\frac{1}{-(l+\xi)+\sqrt{(l+\xi)^2+\varrho^2}} \quad \frac{1}{\sqrt{(l+\xi)^2+\varrho^2}} - \frac{1}{l-\xi+\sqrt{(l-\xi)^2+\varrho^2}} \quad \frac{1}{\sqrt{(\xi-l)^2+\varrho^2}}\right]$$
$$= -\frac{qh}{2\pi\varrho^2}\left[1 + \frac{l+\xi}{\sqrt{(l+\xi)^2+\varrho^2}} - 1 + \frac{l-\xi}{\sqrt{(l-\xi)^2+\varrho^2}}\right] = -\frac{qh}{2\pi\varrho^2}\left[\cos\chi_1 + \cos\chi_2\right] \quad (20),$$

unter χ_1 und χ_2 die von den Geraden AP und PB mit der positiven Richtung der x-Achse eingeschlossenen Winkel verstanden.

Wird wieder

$$\left|\frac{\varrho}{l-\xi}\right|, \quad \left|\frac{\varrho}{l+\xi}\right| < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

vorausgesetzt, so erhält man, wenn man sich auf die Betrachtung der Punkte beschränkt, die zwischen den Ebenen $\xi = -l$ und $\xi = l$ liegen, für die also

$$l - \xi > 0, \quad l + \xi > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

ist, in bekannter Weise durch Reihenentwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi+l)^2+\varrho^2}} = \frac{1}{l+\xi}\left(1 - {}^1/_2 \frac{\varrho^2}{(l+\xi)^2} + \ldots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22),$$

demnach

$$\frac{l+\xi}{\varrho^2\sqrt{(\xi+l)^2+\varrho^2}} = \frac{1}{\varrho^2}\left(1 - \frac{\varrho^2}{2(l+\xi)^2} + \ldots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und in ähnlicher Weise

$$\frac{l-\xi}{\varrho^2\sqrt{(l-\xi)^2+\varrho^2}} = \frac{1}{\varrho^2}\left(1 - \frac{\varrho^2}{2(l-\xi)^2} + \ldots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Aus Gl. (20), (16), (23) und (24) folgt

$$\delta = -\frac{E\,C\,h}{2\,\pi}\,\frac{1}{\varrho^2}\left(2 - \frac{\varrho^2}{2(l+\xi)^2} - \frac{\varrho^2}{2(l-\xi)^2} + \ldots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder von der vierten und höheren Ordnung in bezug auf $\frac{\varrho}{l-\xi}$ und $\frac{\varrho}{l+\xi}$ sind. Sind $\left|\frac{\varrho}{l+\xi}\right|$ und $\left|\frac{\varrho}{l-\xi}\right|$ so klein, daß man sich auf das erste Glied beschränken kann, so findet man

$$\delta = -\frac{E\,C\,h}{\pi\,\varrho^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

Dies ist die bekannte Formel zur Bestimmung der elektrischen Verteilung, die auf der Erdoberfläche von einer unendlich langen, homogen geladenen Geraden influenziert wird. Der Fehler, den man begeht, wenn man sich auf die Betrachtung des ersten Gliedes beschränkt, beträgt für

$$\frac{\varrho}{l+\xi}, \quad \frac{\varrho}{l-\xi} < \frac{1}{7}$$

etwa 1 vH. Dies gilt z. B. gewiß in dem Rechteck

$$-5 \text{ km} < \xi < 5 \text{ km},$$
$$-140 \text{ m} < \eta < 140 \text{ m}.$$

In der Nähe der Endpunkte A und B der Freileitung erhält man eine andere übersichtliche Darstellung der Flächendichte δ. In der Nähe von B ($l - \xi$ kleine Zahl) ist z. B.

$$\delta = -\frac{E\,C\,h}{2\pi\varrho^2}\left\{\left(2 - \frac{\varrho^2}{2(l+\xi)^2} + \ldots\right) - 1 + \cos\chi_2\right\}$$
$$= -\frac{E\,C\,h}{2\pi\varrho^2}\left\{1 + \cos\chi_2 - \frac{\varrho^2}{2(l+\xi)^2} + \ldots\right\} \quad (27).$$

3. Fall eines Wechselstromes. Wir haben bis jetzt angenommen, daß die Leitung unter Gleichspannung steht. Es möge sich nunmehr im Gegensatz hierzu um Wechselspannung handeln. Der Einfachheit halber nehmen wir ihre Spannungskurve sinusförmig an und setzen demgemäß

$$E = E_0 \sin\omega t \qquad (\omega = 2\,\pi\,N,\ N = \text{Frequenz}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Dann wird auch die Ladung in dem Punkt $(\xi, \eta, 0)$ auf der Erdoberfläche Funktion der Zeit sein,

$$\delta = -\frac{C\,h\,E_0}{2\,\pi\,\varrho^2}\left[\frac{l+\xi}{\sqrt{(l+\xi)^2+\varrho^2}} + \frac{l-\xi}{\sqrt{(l-\xi)^2+\varrho^2}}\right]\sin\omega t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Die Erde wird von einer Strömung durchflossen. Die einzelnen Stromfäden gehen von dem geerdeten Pol der Wechselstrommaschine aus und münden an der Erdoberfläche. Die Normalkomponente $\mathfrak{A}_\nu$ des Strömungsvektors $\mathfrak{A}$ hat, wie man leicht sieht, den Wert

$$\mathfrak{A}_\nu = -\frac{d\,\delta}{d\,t} = \frac{C\,h\,E_0\,\omega}{2\,\pi\,\varrho^2}\left[\frac{l+\xi}{\sqrt{(l+\xi)^2+\varrho^2}} + \frac{l-\xi}{\sqrt{(l-\xi)^2+\varrho^2}}\right]\cos\omega t \quad . \quad . \quad (30).$$

Die Erdelektrode möge im Koordinatenursprung liegen und zunächst punktförmig sein. Da die gesamte, auf der Erdoberfläche verteilte Ladung den Wert $-2\,l\,C\,E_0 \sin \omega t$ hat, so ist der Gesamtstrom augenscheinlich gleich

$$\frac{d}{dt}(-2\,l\,C\,E_0 \sin \omega t) = -2\,l\,C\,\omega\,E_0 \cos \omega t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Im Koordinatenursprung haben wir demnach eine einfache Quelle von der Ergiebigkeit

$$-2\,l\,C\,\omega\,E_0 \cos \omega t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

anzunehmen.

Nimmt man den Erdkörper als homogen leitend an, so läuft die Bestimmung der Strömung auf die Lösung der folgenden Randwertaufgabe hinaus:

Es ist diejenige in dem Halbraume $\mathfrak{T}$ $(Z < 0)$ reguläre Potentialfunktion (Strömungspotential) $\Psi(X, Y, Z) \cos \omega t$ zu bestimmen, die auf S der Bedingung

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = -\frac{C\,h\,E_0\,\omega}{2\pi\varrho^2}\left[\frac{l+\xi}{\sqrt{(l+\xi)^2+\varrho^2}} + \frac{l-\xi}{\sqrt{(l-\xi)^2+\varrho^2}}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

genügt, sich in der Umgebung des Koordinatenursprunges wie

$$-\frac{2\,l\,C\,\omega\,E_0}{2\pi R} + \text{stetige Funktion} \qquad (R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2) \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

verhält und im Unendlichen verschwindet[1]). Das Verhalten in der Umgebung des Koordinatenursprunges entspringt der Forderung, daß der Gesamtstrom

$$-\lim_{\varepsilon = 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial R}\, df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

(S_ε Halbkugel vom Radius ε um den Koordinatenursprung) den Wert (31) hat.

Aus bekannten Sätzen folgt, daß es nicht mehr als eine Lösung des Problems geben kann.

Faßt man den Koordinatenursprung als eine Stromquelle von der Ergiebigkeit (32), den Punkt $(\xi, \eta, 0)$ als eine Elementarquelle von der Ergiebigkeit (31) auf, so findet man die Lösung ohne weiteres in der Form

$$\Psi(X, Y, Z) = -\frac{2\,l\,C\,\omega\,E_0}{2\pi(X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}}$$

$$+ \frac{C\,h\,E_0\,\omega}{2\pi\cdot 2\pi}\int \frac{1}{\varrho^2}\left[\frac{l+\xi}{\sqrt{(l+\xi)^2+\varrho^2}} + \frac{l-\xi}{\sqrt{(l-\xi)^2+\varrho^2}}\right]\frac{d\xi\,d\eta}{[(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+Z^2]^{1/2}} \quad (36).$$

Die Integration ist über die ganze Ebene $\zeta = 0$ erstreckt zu denken. Die weitere Behandlung und Diskussion der Beziehung (36), insbesondere der Nachweis, daß ψ tatsächlich die gesuchte Lösung darstellt, bleibt einer Fortsetzung dieses Aufsatzes vorbehalten. 24

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Probleme der Flugzeugstatik.

Von **J. RATZERSDORFER** in Wien.

Zwischen der Festigkeitsberechnung einer Flugzeugzelle und der des Tragwerks einer Brücke oder Dachkonstruktion besteht kein grundsätzlicher Unterschied; es sind immer die gleichen Verfahren der Statik starrer und elastischer Körper, mit denen man die Lösung aller Festigkeitsaufgaben erzielt. Das Bestreben, zur Gewichtsersparnis (und gelegentlich auch zur Verringerung des Luftwiderstandes) die Flugzeugteile in möglichst kleinen Dimensionen zu halten, hat jedoch dazu geführt, die Berechnung vielfach mit einer größeren Annäherung an die Wirklichkeit vorzunehmen, als es sonst im Bauwesen üblich

---

[1]) Da im Unendlichen keine Stromsenke liegt, so ist $\lim_{R \to \infty} \int_{S_*} \frac{\partial \psi}{\partial R}\, df = 0$ (S_* Halbkugel um den Koordinatenursprung vom Halbmesser R).

ist. Bei den verhältnismäßig bedeutenden Abmessungen der Konstruktionsteile von Ingenieurbauten wäre eine soweit getriebene Genauigkeit der Rechnung häufig ganz unzweckmäßig. Die Materialökonomie, mit der Flugzeuge konstruiert werden, bringt es also mit sich, daß die statische Berechnung gewisse neuartige Probleme bietet.

Zunächst soll die Bezeichnung der Hauptteile des Flugzeugtragwerks angegeben werden. Abb. 1 zeigt im Aufriß die Vorderansicht des Tragwerks, der sog. Zelle eines normalen Doppeldeckers, und im Grundriß die obere Tragfläche. Die Vorder- und Hinterwand besteht aus den Holmen H als Gurtungen (H_1 oberer Vorderholm, H_2 oberer Hinterholm) und aus den Stielen (Streben) S und den Kabeln K (K_1 Haupt- und K_2 Gegenkabel) als Füllungsgliedern. Jede Tragfläche (die obere und untere) enthält überdies als Verband zwischen den Holmen die Distanzrohre D und die Innenverspannung V. Q ist das Querruder (die Verwindungsklappe). Die obere Tragfläche ist gegen die untere um die sog. Staffelung nach vorn verschoben. Zwischen zwei Stielen und zwei Distanzrohren, in einer Stielebene, werden in der Querrichtung Kabel eingezogen, die im Kreuzriß sichtbare Stielverspannung (die Tiefenkreuzkabel) T. St ist das mitunter vorhandene Stirnkabel, Sp der Spannturm, ein Konstruktionsteil, der den Anschluß der oberen Tragfläche an den Rumpf vermittelt; die untere Tragfläche ist im Falle der Abbildung gelenkig an den Rumpf angeschlossen. Auf die Holme sind Holzrippen (Spanten) R aufgezogen, durch die das Profil der Fläche festgelegt wird. Ueber die Rippen wird die Verkleidung aus zellonierter Leinwand oder Sperrholz gespannt.

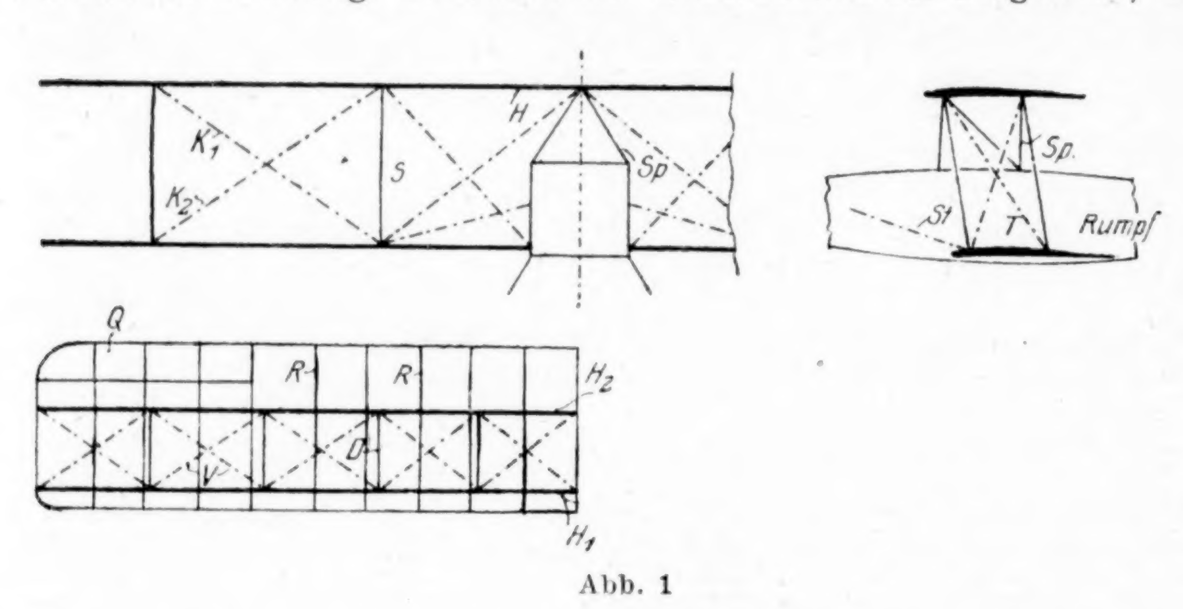


Abb. 1

Die das Tragwerk beim Flug beanspruchenden Lasten werden aus aerodynamischen Untersuchungen ermittelt. Man pflegt die statische Berechnung für gewisse angenommene Grenzwerte, den Steigflug (Abfangen), Gleitflug, Sturzflug und Oberdruck (Rückenflug) durchzuführen[1]). Abb. 2 gibt eine Vorstellung von den hierbei etwa gebräuchlichen Lastannahmen. Vorgeschrieben wird im allgemeinen für Steigflug eine 5fache, für Gleitflug und Oberdruck eine 3- bis 3,5fache und für Sturzflug eine 2- bis 2,5fache Bausicherheit. Für die Dimensionierung eines Organs ist die jeweils ungünstigste Belastungsart maßgebend. Im Steigflug wirkt — nach Annahme — die Auftriebskraft senkrecht zur Tragflächensehne, im Drittel der Flügeltiefe vom Vorderrand des Flügels entfernt. Der Auftrieb ist gleich zu setzen dem Gewicht G des vollbelasteten Flugzeugs, vermindert um das Gewicht G_1 der Tragzelle. Die Belastung der Abb. 2 wird entsprechend der Flächengröße auf die einzelnen Tragflächen verteilt; oft wird auch das Verhältnis der Lastaufnahme von Ober- und Unterflügel — genaueren Untersuchungen entsprechend — von der Staffelung und der Schränkung (der Differenz der Anstellwinkel α der oberen und unteren Tragfläche, vergl.

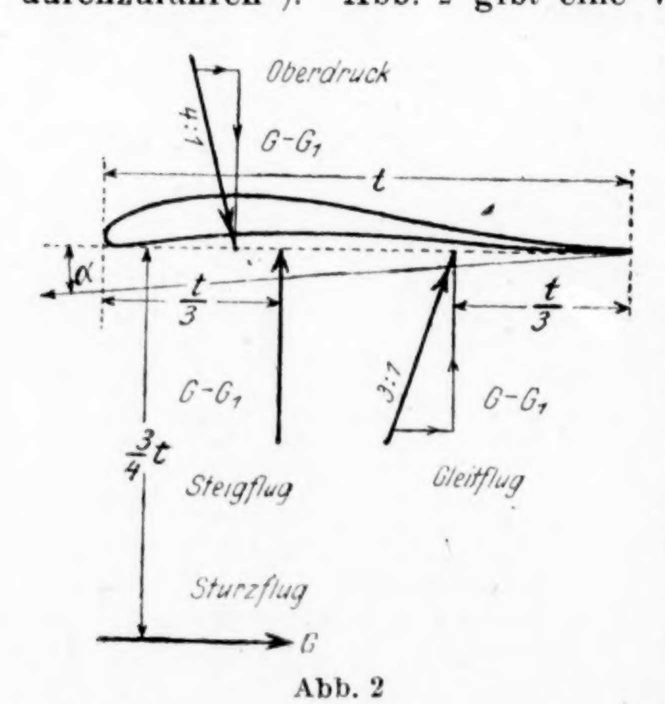


Abb. 2

[1]) Derartige Vorschriften wurden während des Krieges von den einzelnen Heeresleitungen ausgegeben. Dem Referenten lagen insbesondere vor: Vorschriften über die Bausicherheit und die statische Berechnung der Flugzeuge, k. u. k. Fliegerarsenal, Wien 1917; Leitsätze für den Festigkeitsnachweis für Flugzeuge, k. pr. Inspektion der Fliegertruppen, Berlin 1918. Vergl. a. H. Reißner, Jahrb. d. wissensch. Ges. f. Luftfahrt, 1913, S. 85 bis 107.

Abb. 2) abhängig gemacht. Die spez. Flächenbelastung p kann für die Rechnung ausreichend genau als über die Tragfläche konstant angesehen werden[1]).

Das Tragwerk des Flugzeugs ist ein räumliches System, das (mit den Tragflächenholmen) aus biegungssteifen Stäben, aus an diesen gelenkig angeschlossenen stabsteifen (d. h. nur Zug- oder Druckkräfte übernehmenden) Stäben und aus Zugorganen (Kabeln) besteht. Die Holme laufen über die Stiele, mitunter auch über den Spannturm durch, und sind durch die Luftkräfte in der Querrichtung und die Systemkräfte in der Längs- und Querrichtung beansprucht.

Die Luftkräfte werden durch die Bespannung auf die Rippen und von diesen auf die Holme übertragen. Nimmt man an, daß die Rippen gelenkig auf den Holmen gelagert sind, so ergeben sich die Holmlasten als die Auflagerkräfte der durch die Luftkräfte ergriffenen Rippen. Durch die Anschlußleisten ist eine teilweise Einspannung der Spanten gegeben, die eine Erhöhung der Holmfestigkeit bewirkt[2]); auch die Bespannung versteift das Tragsystem. Man pflegt dies außer acht zu lassen und mit einer gleichförmigen Verteilung der Querlasten über die Holme zu rechnen, wobei man sich im Hinblick auf Bausicherheit auf der günstigen Seite bewegt.

Eine Ermittlung der Systemkräfte kann bei Berücksichtigung der Holmdeformation nur durch eine Näherungsfolge geschehen, da die Holmmomente transzendente Funktionen der zu bestimmenden Längskräfte sind (vergl. die Holmberechnung). Man schlägt beispielsweise den folgenden Weg ein. Man betrachtet den Holm zunächst als nur querbelasteten kontinuierlichen Träger auf ungesenkten Zwischenstützen und bestimmt die Stützkräfte in üblicher Weise bei vorhergehender Ermittlung der Stützenmomente aus den Dreimomentengleichungen Clapeyrons[3]). Hiernach faßt man Zelle und Spannturm als ein Fachwerk auf, d. h. als ein Stabsystem, dessen Stäbe miteinander gelenkig verbunden sind und das nur in den Knotenpunkten, d. i. den Gelenkstellen, durch Knotenlasten von der Größe der vorher berechneten Stützkräfte belastet ist. Die Berechnung erfolgt nach den für räumliche Fachwerke üblichen Methoden[4]), bei statischer Unbestimmtheit unter Zuhilfenahme der Elastizitätsgleichungen von Maxwell-Mohr[5]). Mit den so errechneten Stabkraftwerten bestimmt man unter Berücksichtigung der Kontinuität und der elastischen Deformation neuerdings die Stützkräfte des Holmes und mit diesen als Knotenlasten wieder die Systemkräfte. Dieser Vorgang ist so oft zu wiederholen, bis die Differenz zwischen den angenommenen Knotenlasten und den berechneten Reaktionen gering ist[6]). In praxi begnügt man sich häufig bereits mit den unter der Annahme gelenkiger Knoten gefundenen Längskräften, also mit der ersten Näherung.

Bei normal abgespannten, statisch unbestimmten Zellensystemen, Abb. 1, wird die Berechnung oft auch für den Fall durchgeführt, daß in der Vorder- oder, wenn ungünstiger, in der Hinterwand die am stärksten beanspruchte Verspannung fehlt (z. B. ein Zugorgan reißt). Auch dann soll noch eine entsprechende Sicherheit vorhanden sein[7]).

Wenn es die Ausbildung des Systems gestattet, wird eine Zerlegung in ebene Fachwerke vorgenommen: vordere und hintere Tragwand, obere und untere Tragfläche. Für

---

[1]) Knoller gibt die Beziehung $p = p_0 \sqrt[4]{1-\left(\frac{x}{l}\right)^2}$ an, die die Lastabnahme gegen die Flügelenden berücksichtigt; es bezeichnen p_0 die spez. Belastung in der Mitte (beim Rumpf) und l die Länge der Tragfläche von Flugzeugmitte (vom Anschluß am Rumpf) bis zu den Flügelenden. Vergl. Pröll, Flugtechnik, München 1919, S. 264 und die bezüglichen Annahmen in den Bauvorschriften, Fußnote 1.

[2]) Ballenstedt, Der Einfluß der Spante auf die Festigkeit der Holme, Technische Berichte, herausgegeben von der Flugzeugmeisterei der Inspektion der Fliegertruppen, 1919.

[3]) Vergl. z. B. Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch, 23. Aufl. Berlin 1920, 3. Bd. S. 126.

[4]) Siehe etwa: Schlink, Statik der Raumfachwerke, Leipzig 1907. Ferner die Abhandlung von v. Mises, Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme, Zeitschr. Mathem. u. Physik 64, 1916. (Das räumliche Problem wird hier durch ein Abbildungsverfahren auf ein ebenes zurückgeführt.)

[5]) Siehe: Zschetzsche, Handbuch der Baustatik, Düsseldorf 1912, Art. 17 und 20.

[6]) Bei Dreiecksfachwerken kann eine Verbesserung der Stabkräfte einfacher nach den Angaben Müller-Breslaus vorgenommen werden: Graphische Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1908, II. Bd., 2. Abt., § 19.

[7]) In den österr. Vorschriften (Fußnote 1, S. 48) ist hierfür eine 2,5 fache Sicherheit für Gleitflugbelastung vorgeschrieben.

die zwei Fachwerken gemeinsamen Stäbe (die Holme) ergeben sich die Stabkräfte durch Summation der einzeln bestimmten Werte[1]).

Abb. 3 zeigt einen Eindecker, bei dem durch das Einfügen einer sog. Brücke die notwendige Konstruktionshöhe erreicht wird. Die Verspannungskabel sind zu Festpunkten des Spannturms oder des Rumpfes gezogen. In Abb. 4 ist das Tragsystem eines sog.

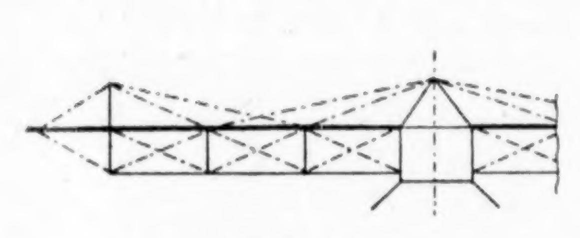
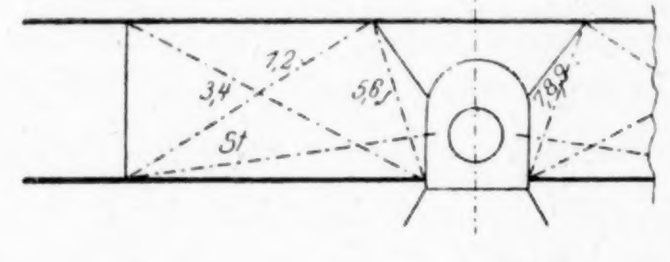


Abb. 3



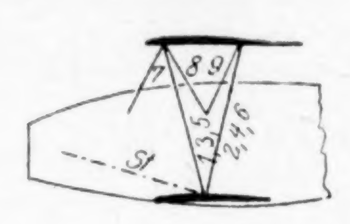
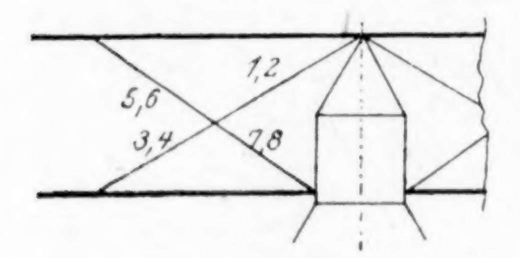


Abb. 4

Anderthalbdeckers gezeichnet. Die untere Tragfläche besitzt geringere Tiefe und nur einen Holm; die von den oberen Holmen ausgehenden Stiele laufen gabelförmig beim unteren Holm zusammen (Nieuport). Die Stielverspannung fehlt. Die normale Zelle eines Doppeldeckers wurde an Abb. 1 beschrieben. Hiervon abweichende Konstruktionen von Doppeldeckern sind z. B. die kabellos konstruierte Zelle in Abb. 5 und das in der Vorderansicht gezeichnete Strebensystem der Abb. 6[2]). Abb. 7 zeigt den Aufbau eines



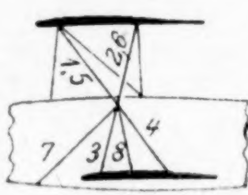


Abb. 5

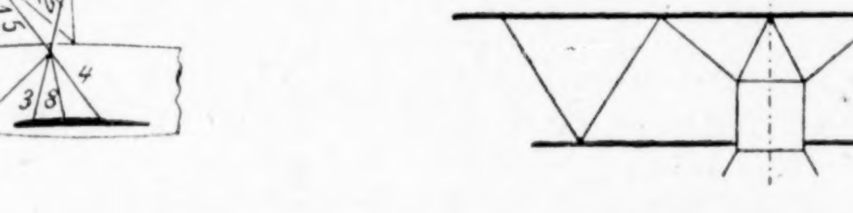


Abb. 6

Dreideckers. Der Spannturm ist als Pyramide ausgebildet (z. B. in Abb. 1) oder als Baldachin (in Abb. 4). Die Anordnung als Baldachin bezweckt eine Verkürzung der dem Rumpf zunächst liegenden Holmöffnung, sowie eine bessere Sicht nach vorn, wenn die Verspannung vermieden wird. Bei größeren Flugzeugen mit dreiteiligen oberen Tragflächen ist auch eine Kombination beider Ausführungen in Verwendung. Sind die Tragflächen über dem Baldachin durchlaufend, so werden die Baldachinstreben oft gelenkig am Holm angeschlossen. Es entspricht dies am besten der Rechnungsweise, bei der Zelle und Spannturm als ein Tragsystem angesehen wird. Wenn untere Tragflächen durchlaufend angeordnet sind, ist auch unterhalb des Rumpfes ein Spannturm angebracht. Häufig wird der Spannturm, besonders wenn die Zelle in ebene Fachwerke zerlegt, wird für sich allein berechnet. Man stellt dann die Forderung, daß der Spannturm für sich ein stabiles System bilden soll. Diese Forderung kann aber mit Rücksicht auf die Beanspruchung im Kurvenflug überhaupt zweckmäßig erscheinen und dieser Belastung derart Rechnung getragen werden, daß man z. B. alle Anschlußkräfte des Steigflugs auf einer Flugzeughälfte um einen gewissen Betrag vermehrt, auf der andern vermindert am Spannturm angreifen läßt[3]). Je nach Ausbildung wird der Spannturm als Fachwerk oder räumlicher Steifrahmen behandelt.

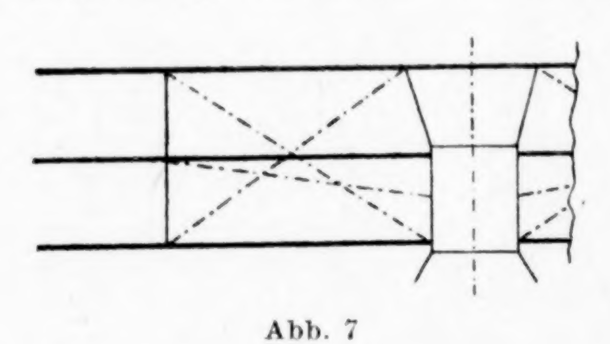


Abb. 7

[1]) Siehe; Saliger, Ueber eine Anwendung der Statik im Flugzeugbau, Oesterr. Flugzeitschr. 1916, Heft 5/6; Berechnung von vierseitigen Zellen unter Einwirkung von Kräften, die in den Zellenebenen wirken, Oesterr. Flugzeitschr. 1916. Heft 13/14. — Schwengler, Die Statik im Flugzeugbau, Berlin 1917.

[2]) Vergl. auch: Struve, Berechnung von Verspannungssystemen mit Zwischenstielen, Technische Berichte der Flugzeugmeisterei 1918.

[3]) In den österr Vorschriften (Fußnote 1, S. 48) ist eine Vermehrung bzw. Abminderung um $^1/_5$ der Anschlußkräfte des Steigfluges vorgesehen.

Heute sind hauptsächlich Doppeldecker in Verwendung. Ihre Vorzüge gegenüber den Eindeckern sind nicht flugtechnischer, sondern vor allem konstruktiver Natur, da die beim Eindecker nur künstlich erzielbare Konstruktionshöhe durch das Tragwerk des Doppeldeckers von selbst gegeben ist[1]). Das »System« des Doppeldeckers wird fallweise auf Grund der gegebenen Verhältnisse gewählt; keiner Ausführung kann von vornherein irgendwelche Ueberlegenheit zuerkannt werden.

Es soll nun die Berechnung der einzelnen Flugzeugorgane besprochen werden; hierbei wird es auch nötig sein, ihre konstruktive Ausbildung zu beachten.

1. Bespannung. Als Bespannung ist vorwiegend Stoff, vielfach auch Sperrholz, bei Metallflugzeugen Aluminium in Verwendung. Der Stoff wird über das Gerippe der Holme und Spanten aufgezogen und dann, also unter Verhinderung der Zusammenziehung, mit Zellonlack getränkt. Pröll[2]) versucht in einigen Aufsätzen eine Festigkeitsberechnung des Bespannungsstoffes. Ausgegangen wird von der Formel, die für unzellonierte, d. h. nicht Schubspannungen übernehmende Stoffe gilt, $\frac{S_1}{\varrho_1} + \frac{S_2}{\varrho_2} = p$, und den sogen. Normalcharakteristiken[3]), die eine auf experimentellem Wege gewonnene Beziehung zwischen den Spannungen S_1 und S_2 von Schuß und Kette und den bezüglichen Dehnungen graphisch vermitteln. ϱ_1 und ϱ_2 sind die entsprechenden Krümmungshalbmesser, p ist die spez. Flächenbelastung. Lewe[4]) entwickelt, ausgehend von der Föpplschen Lösung der Differentialgleichung für eine dünne, rechteckige Platte mit großer Ausbiegung[5]), eine Näherungsformel, die gleichfalls erst nach Schätzung gewisser Größen eine Berechnung gestattet. Die Sperrholz- oder Aluminiumbespannung ist als rechteckige Platte zu untersuchen.

2. Rippen oder Spanten. Durch die Rippen ist wie erwähnt das Tragflächenprofil festgelegt, vergl. Abb. 2. Die Rippe ist in der Regel ein gebogener Holzstab mit Doppel-T-Querschnitt, aus einem 2 bis 3 mm starken Steg mit aufgeleimten Gurtungen bestehend. Da die Holme innerhalb des Profils verlaufen, sind dicke Profile hinsichtlich der möglichen Höhe der Tragflächenholme vorteilhaft. Zur Verringerung des Gewichts besitzt der Steg gewöhnlich dreieckige oder viereckige Ausschnitte. An Stelle der Distanzrohre werden mitunter stärkere kastenförmige Rippen verwendet, die dann zum Tragsystem zu zählen sind.

Bei fester Einspannung der Rippen in den Holmen läge ein aus Holmen und Rippen bestehendes Rahmentragwerk vor, das dann auf Biegung und Torsion beansprucht ist. Man führt die Berechnung der Spanten auf eine Biegungsaufgabe zurück, indem man sie als Träger betrachtet, die auf den Holmen gelenkig gelagert und nur bei einholmiger Stützung im Holm eingespannt sind. Ist die Verteilung der Lasten über die Länge des Spantes bekannt[6]), so kann der Verlauf der Biegungsmomente und Querkräfte in einfacher Weise graphisch bestimmt werden. Die Spannungsermittlung der normalen Rippen hat nach den für vollwandige Biegungsträger bzw. nach den für Rahmenträger üblichen Verfahren zu erfolgen; man begnügt sich aber meist mit einer Belastungsprobe als Nachweis für die erforderliche Festigkeit.

3. Tragflächenholme: Grundlagen. Für einen geraden in seiner Längsrichtung durch eine Druckkraft belasteten Stab gibt die klassische Theorie, bei der im Ansatz der Differentialgleichung der elastischen Linie das Quadrat des ersten Differentialquotienten gegen 1 vernachlässigt wird, als kritische Werte die Eulerschen Knicklasten, für die man unbestimmte Durchbiegungen erhält. Es ist seit Grashof[7]) bekannt, daß diese

---

[1]) Siehe auch die Studie von v. Gries, Dreidecker gegen Zweidecker, Technische Berichte der Flugzeugmeisterei 1917.

[2]) Pröll, Flugtechnik, München 1919, und Aufsätze in der Zeitschr. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1915, 1919, 1920 und in den Technischen Berichten der Inspektion 1919.

[3]) Siehe hierüber: Haas und Dietzius, Stoffdehnung und Formänderung der Hülle von Prall-Luftschiffen in Luftfahrt und Wissenschaft, Berlin 1913. — Weiter: Everling, Vereinfachte Kennlinien für Flügelbespannstoffe, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1920.

[4]) Lewe, Bemerkungen zu den Untersuchungen von A. Pröll über Tragflächenbespannung, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1920.

[5]) Föppl, Vorlesungen über Technische Mechanik, Leipzig 1907, 5. Bd., § 24.

[6]) Siehe Helmann und Madelung, Die Beanspruchung der Flügelrippen, Technische Berichte der Inspektion 1917.

[7]) Grashof, Theorie der Elastizität und Festigkeit, Berlin 1878, 2. Aufl. S. 168.

Unklarheit verschwindet, wenn man die exakte Differentialgleichung der Biegungslinie der Rechnung zu Grunde legt. Solange die Last unterhalb des kritischen Eulerschen Wertes bleibt, gibt es kein anderes Gleichgewicht als das der gleichförmigen Zusammendrückung. Wird die Eulerlast überschritten, so gibt es außer dem gleichförmig gepreßten auch einen zweiten Gleichgewichtszustand mit Ausbiegung, der dann der stabilere ist. Das Eingehen auf die genaue Theorie ist zur Klärung des Problems unerläßlich; handelt es sich aber nur darum die Grenzwerte, das sind die Verzweigungspunkte der Lösung der genauen Differentialgleichung, zu bestimmen, so genügt es nach der Näherungstheorie vorzugehen und festzuhalten, daß das Unbestimmtwerden der Ausbiegung das Kriterium der Knicklast ist.

Beim Tragflächenholm treten zur axialen Belastung noch querwirkende Kräfte hinzu. Als ein konkreter Fall soll ein zweiseitig gelenkig gelagerter Stab betrachtet werden, der durch eine Längskraft und eine gleichförmig verteilte Querbelastung beansprucht ist. Die klassische Näherungstheorie liefert, wenn die Eulersche Knicklast erreicht ist, hier unendlich große Durchbiegungen. Es ist deshalb prinzipiell wichtig zu wissen, welche Beanspruchungen in diesem Grenzfall in Wirklichkeit auftreten und wann es zulässig ist, nach der Näherungstheorie zu rechnen. Während aber beim nur axial belasteten Stab die genaue Rechnung mittels elliptischer Integrale einfach zum Ziele führt, bietet sie beim längs- und querbelasteten Stab bedeutende Schwierigkeiten. Trefftz[1]) integriert die exakte Differentialgleichung der elastischen Linie mit Hilfe des Picardschen Verfahrens der Näherungsfolge unter der Annahme, daß die Lasten senkrecht zur ursprünglichen Stabachse stehen. Unterhalb der Eulerlast ist nur eine Gleichgewichtslage möglich; oberhalb derselben sind drei Biegungslinien vorhanden, die natürliche Durchbiegung, deren Kurve eine Fortsetzung der Kurve unterhalb des Grenzwertes ist und zwei Durchbiegungen entgegengerichtet der Querlast, von denen die mit den größeren Ausbiegungen stabil ist, aber nur durch künstliches Hinüberdrücken des Stabes in die neue Gleichgewichtslage erhalten werden kann. Bei der natürlichen Biegungslinie, die vor allem von praktischer Bedeutung ist, bildet jetzt das Erreichen der Eulerlast keinen ausgezeichneten Fall. Der Verzweigungspunkt der Lösung gibt jetzt als den der Eulerlast analogen Wert jene Drucklast, von der an drei reelle Ausbiegungen bestehen. Reißner[2]) entwickelt zur Lösung dieser Aufgabe unter der Annahme, daß die Last jeweils auf der Biegungslinie senkrecht steht, ein graphisches Verfahren, bei dem die Biegungslinie durch Aneinanderreiben von Krümmungskreisen aufgetragen wird. Seine Ergebnisse stimmen mit denen von Trefftz durchaus nicht überein.

Beim axial- und querbelasteten Stab ist wie beim nur axial belasteten Stab das Gleichgewicht mit Ausbiegung bei einer die Eulersche Knicklast übersteigenden Last nicht verwendbar, da die Durchbiegungen rasch anwachsen und hierbei die Spannungsgrenze in der Regel überschritten wird. Es sind also ebenfalls die aus der klassischen Näherungstheorie gewonnenen Knicklasten als Grenzwerte maßgebend. Für die praktische Festigkeitsberechnung reicht die gewöhnliche Theorie vollkommen aus; man hat unterhalb der Knicklast auf kombinierte Beanspruchung »Druck, Biegung« zu rechnen.

Die Frage, ob es möglich ist sogen. höhere Knicklasten zur Ausbildung zu bringen und ob es gelingt, einzelne Knicklasten durch Anordnung von Querlasten auszuschalten, ist sowohl von theoretischem Interesse als auch von einiger praktischer Bedeutung, die über den Rahmen des Flugzeugbaues hinausreicht. Hauptsächlich wären jene Anordnungen von Wichtigkeit, bei denen die erste Knicklast ausgeschieden wird. Einwandfreie theoretische und experimentelle Ergebnisse sind hierüber bisher nicht festgestellt.

4. Praktische Holmberechnung. Reißner und Schwerin[3]) berechnen den über mehrere Stützen gelagerten Tragflächenholm nach den von Müller-Breslau angegebenen Formeln. Zwischen den drei Stützenmomenten M_{r-1}, M_r und M_{r+1} der zwei aufeinanderfolgenden Oeffnungen mit den Längen s_r und s_{r+1}, die durch die exzentrischen Druckkräfte S_r bzw. S_{r+1} und die gleichförmig verteilten Querlasten g_r bzw. g_{r+1} pro

[1]) Trefftz, Zur Frage der Holmfestigkeit, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1918.

[2]) Reißner, Die Biegungslinie des vollkommen elastischen Stabes infolge Längskraft und Querbelastung in der Nähe der Knicklast, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1918.

[3]) Reißner und Schwerin, Die Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme. Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt 1916. — Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1908, 2. Bd. 2. Abt. § 87.

Längeneinheit ergriffen sind, besteht die »Stetigkeitsbedingung«, eine Gleichung Clapeyronscher Bauart

$$M_{r-1}\psi_r'' + M_r(\psi_r' + \psi'_{r+1}) + M_{r+1}\psi''_{r+1} + y_{r-1}\delta_r - y_r(\delta_r + \delta_{r+1})$$
$$+ y_{r+1}\delta_{r+1} + g_r s_r^2 \psi_r''' + g_{r+1} s^2_{r+1}\psi'''_{r+1} + S_r(e_r'\psi_r'' + e_r''\psi_r') + S_{r+1}(e'_{r+1}\psi'_{r+1}$$
$$+ e''_{r+1}\psi''_{r+1}) = 0.$$

Hierbei ist zur Abkürzung gesetzt[1]):

$$\alpha = s\sqrt{\frac{S}{EJ}},\ \delta = \frac{1}{s}$$

$$\psi' = \frac{1}{Ss}\left(1 - \frac{\alpha}{tg\,\alpha}\right),\ \psi'' = \frac{1}{Ss}\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha} - 1\right),\ \psi''' = \frac{1}{Ss}\left(\frac{tg\,\frac{\alpha}{2}}{\alpha} - \frac{1}{2}\right).$$

Die Stützenmomente sind im Sinne einer Vergrößerung der Deformation positiv gezählt. E ist der Youngsche Modul (Elastizitätsmodul) des Holmmaterials, J das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche (gewöhnlich eines Kastenquerschnitts, seltener Doppel T-Profils) bezüglich der wagrechten Schwerachse, die als Hauptachse vorausgesetzt ist. Die vertikalen Verschiebungen y der Knotenpunkte können — bei der gebräuchlichen Zerlegung des Systems in ebene Fachwerke — mittels eines Williotschen Planes oder bei Dreiecksnetzen aus der Aenderung der Dreieckswinkel bestimmt werden. e' ist die Exzentrizität der Längskraft am linken, e'' am rechten Ende der Oeffnung. Die Exzentrizität ist positiv gezählt, wenn sie bei der Längsdruckkraft eine Vergrößerung des Biegungsmomentes hervorruft. In der früheren Zeit des Flugzeugbaues waren sogen. Glockenbeschläge der Knotenpunkte in Verwendung, womit eine exzentrische Anordnung der Längskräfte bedingt war. Es wurde auch beim Anschluß der Holme am Rumpf eine exzentrische Aufhängung versucht, um ein günstig wirkendes »Einspannmoment« herbeizuführen. Gewöhnlich wird aber heute die Exzentrizität vermieden und die Konstruktion der Holmanschlüsse so eingerichtet, daß der Schnittpunkt der Stiele und Kabel in die Holmachse fällt. — Aus dem Gleichungssatz der Stetigkeitsbedingungen können,

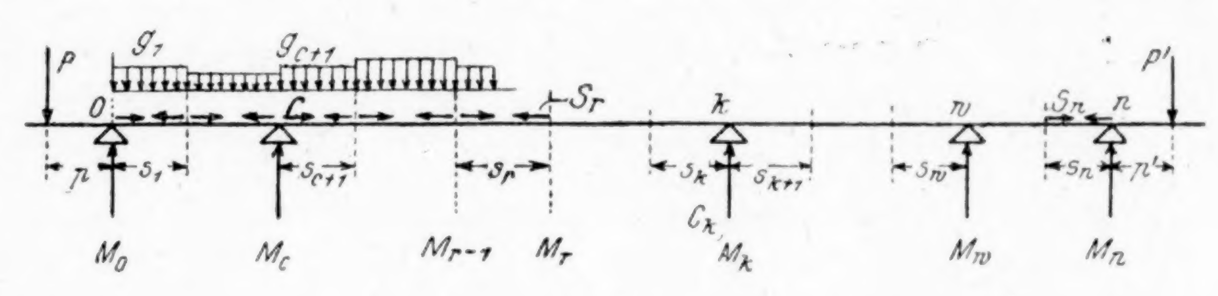


Abb. 8

da die Endmomente gegeben sind (Pp aus der Kragarmbelastung, vergl. Abb. 8, null bei gelenkigem Anschluß am Rumpf oder Spannturm) die Stützenmomente berechnet werden.

Der Auflagerdruck an der Stütze r ist

$$C_r = M_{r-1}\delta_r - M_r(\delta_r + \delta_{r+1}) + M_{r+1}\delta_{r+1} - y_{r-1}S_r\delta_r + y_r(S_r\delta_r + S_{r+1}\delta_{r+1})$$
$$- y_{r+1}S_{r+1}\delta_{r+1} + g_r\frac{S_r}{2} + g_{r+1}\frac{S_{r+1}}{2} + (e_r' - e_r'')S_r\delta_r + (e''_{r+1} - e'_{r+1})S_{r+1}\delta_{r+1}.$$

Das Biegungsmoment in der Oeffnung s, deren Endmomente M_a und M_b sind, ist für einen Querschnitt im Abstand x von der Stütze a durch die Gleichung

$$M_x = S\left(A\cos\frac{x}{k} + B\sin\frac{x}{k}\right) - g\,k^2$$

bestimmt, aus der sich das Maximalmoment $M_{max} = SA\sec\frac{x_0}{k} - g\,k^2$ ergibt. Es bedeuten:

$$k^2 = \frac{EJ}{S},\ A = \frac{M_a + Se' + gk^2}{S},\ B = \frac{M_b + Se'' + gk^2}{S\sin\alpha} - A\,\mathrm{cotg}\,\alpha,\ tg\frac{x_0}{k} = \frac{B}{A}.$$

Die Gleichung für M_{max} ist nur benutzbar, wenn x_0 zwischen O und s liegt. Sonst fällt das Maximalmoment mit dem größeren der beiden Stützenmomente zusammen.

Die Durchbiegung im Abstand x von der Stütze a ist durch die Beziehung

$$S\,y = M_x - \mathfrak{M}_x - \frac{(M_b + Se'')\,x + (M_a + Se')\,(s-x)}{S} + S\frac{y_b\,x + y_a\,(s-x)}{S}$$

gegeben, wobei $\mathfrak{M}_x$ das Biegungsmoment im Querschnitt x für den einfachen Balken von der Stützlänge s ist.

[1]) Durch eine von der Inspektion der Fliegertruppen ausgegebene Tabelle der Werte $\psi \cdot Ss$ wird die zahlenmäßige Berechnung sehr erleichtert.

Ratzersdorfer[1]) gibt zur Bestimmung des Verlaufes der Biegungsmomente und Durchbiegungen einer Oeffnung eine graphische Darstellung in Polarkoordinaten. Nimmt man an, daß durch in gleichen Abständen λ angebrachte Flügelrippen, von denen die äußersten an den Enden der Oeffnung liegen, auf den Holm Einzellasten $g\lambda$ übertragen werden, so ist nach Müller-Breslau[2]) im früheren Ausdruck für M_x der Wert gk^2 durch gv^2 zu ersetzen, wobei $gv^2 = gk^2 \dfrac{\frac{\lambda}{2k}}{tg\frac{\lambda}{2k}}$. Gümbel[3]) teilt zur Ermittlung der Biegungsmomente und Durchbiegungen der Oeffnung ein zeichnerisches Näherungsverfahren mit. Sind die Endmomente der Oeffnung gleich null, so gilt, wenn n die Knicksicherheit bei Zugrundelegung der Eulerformel bedeutet, in guter Annäherung: $M_{\max} = \dfrac{g s^2}{8} \dfrac{n}{n-1}$ die sog. «Formel von Vianello«, die sich im Flugzeugbau sehr eingebürgert hat. Eine ähnliche Formel — in gewisser Hinsicht eine Erweiterung — stellen Pröll[4]) und Müller-Breslau[5]) für das Biegungsmoment in Oeffnungsmitte für den Fall auf, daß die Endmomente nicht null sind.

Infolge der in der Tragfläche angeordneten Innenverspannung, vergl. Abb. 1, entstehen innerhalb einer Oeffnung, das ist des Teiles zwischen zwei Stützen, verschiedene Längskräfte. Man hilft sich oft derart, daß man für jede Oeffnung einen Mittelwert der Längskräfte bildet und nach den angegebenen Verfahren rechnet. Das Abschätzen eines richtigen Mittelwertes ist im allgemeinen unsicher, bei einer Zusammensetzung von Zug- und Druckkräften sogar unmöglich. Es ergibt sich dadurch die Notwendigkeit den Einfluß der Innenverspannung theoretisch zu verfolgen. Die Oeffnung sei in »Felder« mit konstantem k derart unterteilt, daß in jedem Feld die Querlast gleichförmig verteilt ist, Abb. 8. Wesentlich für die Rechnung ist die Richtung der Längskraft an den Trennungsstellen zweier Felder. Welche Annahme hier zutreffend ist, müßte durch sorgfältig überdachte Versuche und Beobachtungen an Tragflächen oder anderen Fachwerken entschieden werden.

Müller-Breslau[6]) berechnet den über mehrere Stützen durchlaufenden Holm, dessen Oeffnungen in zwei gleiche Felder unterteilt sind. An den nicht unterstützten Trennungsstellen (in der Mitte der Oeffnungen) sind vertikale Einzellasten V angenommen, womit eine Neigung der Längskraft berücksichtigt werden kann. Die gleichförmig verteilte Querlast ist für die Oeffnung konstant. In allgemeiner Form kann man bei beliebig vielen Feldern in einer Oeffnung ansetzen[7]): zwischen den drei Momenten und den drei Durchbiegungen an den (unterstützten oder nicht unterstützten) Trennungsstellen von zwei benachbarten Feldern s_r und s_{r+1}, die durch die zentrischen Druckkräfte S_r und S_{r+1}, die gleichförmig verteilten Querlasten g_r und g_{r+1} pro Längeneinheit und, wenn die Trennungsstelle r nicht unterstützt ist, durch die vertikale Last V_r beansprucht sind, (wie früher) die »Stetigkeitsbedingung«

$$M_{r-1}\psi_r'' + M_r(\psi_r' + \psi'_{r+1}) + M_{r+1}\psi''_{r+1} + y_{r-1}\delta_r - y_r(\delta_r + \delta_{r+1})$$
$$+ y_{r+1}\delta_{r+1} + g_r s^2_r \psi_r''' + g_{r+1} s^2_{r+1} \psi'''_{r+1} = 0$$

und für jede nicht unterstützte Trennungsstelle die «Gleichgewichtsbedingung«

$$M_{r-1}\delta_r - M_r(\delta_r + \delta_{r+1}) + M_{r+1}\delta_{r+1} - y_{r-1}S_r\delta_r + y_r(S_r\delta_r + S_{r+1}\delta_{r+1})$$
$$- y_{r+1}S_{r+1}\delta_{r+1} + g_r\frac{s_r}{2} + g_{r+1}\frac{s_{r+1}}{2} + V_r = 0.$$

---

[1]) Ratzersdorfer, Die Berechnung der Tragflächenholme, Oesterr. Flugzeitschr. 1919. Zur Berechnung der Tragflächenholme, Zeitschr für Flugt. und Motorl. 1920, Heft 7/8.

[2]) Müller-Breslau, Zur Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme, Technische Berichte der Inspektion 1918. — Siehe auch: Arnstein, Beanspruchung axial gedrückter, durch Einzellasten gebogener Stäbe, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1919.

[3]) Gümbel, Beitrag zur Berechnung von Tragflächenholmen, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1918.

[4]) Pröll, Berechnung der Tragflächenholme, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1917.

[5]) Müller-Breslau, Zur Berechnung von Tragflächenholmen, Zeitschr. für Flugt. u. Motorl. 1918.

[6]) Müller-Breslau, Zur Berechnung der Tragflächenholme, als Entgegnung zu Ratzersdorfer, Zur Berechnung der Tragflächenholme, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1920, Heft 19.

[7]) Siehe Ratzersdorfer, Zur Festigkeitsberechnung der Tragflächenholme, Der Flug 1920; und vergl. Müller-Breslau, Zur Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme, Technische Berichte der Inspektion 1918.

Von der Exzentrizität der Längskräfte wurde abgesehen. Durch die beiden Gleichungssätze ist die Lösung des Problems geleistet, d. h. es besteht Gleichzahl zwischen den unbekannten Momenten und Durchbiegungen und den verfügbaren Gleichungen. Nach Berechnung der Unbekannten sind Biegungsmomente, Durchbiegungen, sowie Stützenreaktionen nach den früheren Angaben bestimmbar. Eliminiert man im Sonderfall der zweifeldrigen Oeffnungen aus dem System der vorstehenden Gleichungen die Momente und Durchbiegungen der nicht unterstützten Trennungsstellen, so entstehen Müller-Breslaus Dreimomentengleichungen zwischen den Stützenmomenten. Beim Anschluß am Rumpf wird V mit der Annahme bestimmt, daß die Längskraft die Richtung der Sehne der elastischen Linie hat; im allgemeinen soll die genauere Berücksichtigung der Längskraftrichtung bei einem zweiten Rechnungsgang erfolgen. Müller-Breslau untersucht weiters den Holm über eine Oeffnung mit drei und vier Feldern [1]), letzteren Fall für gleiche Feldweiten und null gesetzte Einzellasten V, was der Voraussetzung von zur ursprünglichen Stabachse parallelen Längskräften entspricht.

Ratzersdorfer [2]) erzielt eine Rechnungsvereinfachung mit der Annahme, daß die Längskraft an den Trennungsstellen die Richtung der Tangente an die elastische Linie hat und die horizontale Komponente der Längskraft die Größe S besitzt. Die Querlast wirkt normal zur Achse des nicht deformierten Holmes. Für die Stütze k eines n feldrigen Stabes, dessen benachbarte Stützen links und rechts die Bezeichnung c bzw. w haben, Abb. 8, lautet die »Stützengleichung«:

$$M_c \psi''_{c+1} D_{c+1,k} + M_{c+1} [(\psi'_{c+1} + \psi'_{c+2}) D_{c+1,k} + \psi''_{c+2} D_{c+2,k}]$$
$$+ M_{c+2} [\psi''_{c+2} D_{c+1,k} + (\psi'_{c+2} + \psi'_{c+3}) D_{c+2,k} + \psi''_{c+3} D_{c+3,k}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ M_r [\psi_r'' D_{r-1,k} + (\psi_r' + \psi'_{r+1}) D_{r,k} + \psi''_{r+1} D_{r+1,k}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ M_{w-1} [\psi''_{w-1} D_{w-2,k} + (\psi'_{w-1} + \psi_w') D_{w-1,k}] + M_w \psi_w'' D_{w-1,k} + y_c \sum_{k+1}^{w} s - y_k \sum_{c+1}^{w} s + y_w \sum_{c+1}^{k} s$$
$$+ g_{c+1} s^2_{c+1} \psi'''_{c+1} D_{c+1,k} + g_{c+2} s^2_{c+2} \psi_{c+2} (D_{c+1,k} + D_{c+2,k}) + \ldots + g_s s_r^2 \psi_r'''$$
$$(D_{r-1,k} + D_{r,k}) + \ldots + g_{w-1} s_{w-1}^2 \psi'''_{w-1} (D_{w-2,k} + D_{w-1,k}) + g_w s_w^2 \psi_w''' D_{w-1,k} = 0.$$

Für zwei aufeinanderfolgende Felder einer Oeffnung besteht die Gleichgewichtsbedingung

$$M_{r-1} \varphi_r'' + M_r (\varphi_r' + \varphi'_{r+1}) + M_{r+1} \varphi''_{r+1} + g_r s_r^2 \varphi_r''' + g_{r+1} s^2_{r+1} \varphi'''_{r+1} = 0,$$

deren Gleichungssatz durch Uebergang auf Polarkoordinaten graphisch aufgelöst werden kann. Es bedeuten:

$$\varphi' = -\frac{1}{s} \frac{a}{tg\, \alpha}, \quad \varphi'' = \frac{1}{s} \frac{\alpha}{\sin \alpha}, \quad \varphi''' = \frac{1}{s} \frac{tg \frac{\alpha}{2}}{\alpha}; \quad D_{i,k} = \sum_{c+1}^{i} s \,.\, \sum_{k+1}^{w} s \text{ für } i \leq k;$$

ist $i > k$, so sind die Indizes zu vertauschen. Aus den Stützengleichungen und den Gleichgewichtsbedingungen sind die unbekannten Momente berechenbar.

Die Stützkraft an der Stütze k wird

$$C_k = M_{k-1} \varphi_k'' + M_k (\varphi'_k + \varphi'_{k+1}) + M_{k+1} \varphi''_{k+1} + g_k s_k^2 \varphi_k''' + g_{k+1} s^2_{k+1} \varphi'''_{k+1}.$$

Bevor man auf kombinierte Beanspruchung »Druck, Biegung« rechnet, ist es grundsätzlich erforderlich festzustellen, ob man nicht bereits die Knicklast überschritten hat. Die Knickbedingung für den Holm erhält man durch das Nullsetzen der Nennerdeterminante des Momentengleichungssystems. (Man sieht, daß in der klassischen Näherungstheorie die Knickbedingung unbeeinflußt von den betrachteten Querlasten ist.) Die Nennerdeterminante ist Funktion des Vervielfachungsfaktors n der Belastung und man kann n am einfachsten durch Probieren so bestimmen, daß die Determinante gleich null wird. Allgemein gilt der Satz: Wenn die Knickbedingung für eine Oeffnung erfüllt ist, so knickt der Holm nur dann, wenn sich auch die Gesamtheit aller andern Oeffnungen an der Knickgrenze befindet [3]). Eine Diskussion der Knickbedingung für zwei häufig auf-

---

[1]) Müller-Breslau, Die Festigkeitsberechnung der Flugzeugholme, Technische Berichte der Inspektion 1918. VII. Einfluß der in der Tragdecke angeordneten wagrechten Verspannung auf die Holmmomente.

[2]) Ratzersdorfer, Die Berechnung der Tragflächenholme, Oesterr. Flugzeitschrift 1919.

[3]) Ratzersdorfer, Knickfestigkeit gerader Stäbe mit beliebig vielen Feldern, Der Flug 1920.

tretende Sonderfälle gibt Ratzersdorfer[1]). Der auf Druck, Biegung zu untersuchende Spezialfall einfeldriger Oeffnungen, von denen einzelne die Knickgrenze ($\alpha = \pi$) erreichen, kann einfach erledigt werden, wenn man die bezüglichen Oeffnungen in zwei gleiche Felder teilt und nach den hierfür bezeichneten Verfahren rechnet[2]).

Sind einzelne Felder in der Längsrichtung durch Zugkräfte beansprucht, so ist für die betreffenden Felder statt $S \ldots - S$ in die früheren Gleichungen einzuführen. Ist in einem Feld keine Längskraft wirksam, so entsprechen die Ausdrücke für das Feld dem gewöhnlichen Clapeyronschen Dreimomententheorem. Zur Rechnungsvereinfachung kann man auch kleine Zugkräfte gleich null setzen.

Bei Ausführung der Rechnung muß man zunächst über die Art der Bausicherheit schlüssig werden. Da die Spannungen nicht proportional mit der Belastung wachsen, ist die Sicherheit nicht dieselbe, wenn man mit der einfachen Last rechnet und den n ten Teil der Materialfestigkeit als zulässige Spannung erklärt, oder mit n fachen Lasten und der Bruchfestigkeit rechnet. Im Flugzeugbau ist das letztere üblich. Es ist dies für Druckstäbe ungünstiger, für Zugstäbe günstiger. Es ergibt sich so eine Uebereinstimmung mit der Knickberechnung, da bei der Knickung die Sicherheit nur in der Weise ausdrückbar ist, daß für eine n fache Last der labile Zustand eintreten darf. Dem ist gegenüber zu halten, daß alle Entwicklungen nur giltig sind, solange die Spannung unterhalb der Elastizitätsgrenze bleibt. Durch Wahl eines der Spannung entsprechenden Elastizitätsmoduls könnte dies (durch ein Approximationsverfahren) berichtigt werden, was aber in der praktischen Holmberechnung nicht gebräuchlich ist.

Von den normalen zweiholmigen Tragflächen abweichend sind die sogen. Fourniertragflächen, ein Gerippe von Spanten und einer größeren Anzahl von schwächeren Holmen und darüber befestigtem Fournier. Eine Rechnungsmethode die dem Angriff durch längs- und querwirkende Kräfte gerecht wird, ist bisher nicht aufgestellt. Fillunger[3]) empfiehlt ohne Rücksicht auf die Längskräfte auf Biegung zu rechnen und im Hinblick auf diese Näherung den zu fordernden Sicherheitsgrad höher festzusetzen.

Enthält die Tragfläche nur einen Holm, so ist die zufolge der Drehbeanspruchung des Flügels im Holm auftretende Schubspannung zu bestimmen und mit der aus der Beanspruchung Druck bzw. Zug, Biegung hervorgehenden Spannung zu kombinieren.

5. Stiele oder Streben und Kabel. Stiele erhalten eines günstigen Luftwiderstandes halber in der Regel einen Querschnitt von Tropfenform vom Verhältnis Länge : Breite = 2 : 1. In Oesterreich waren derartig einseitig zugeschärfte Ovalrohre aus Flußstahl normalisiert; Querschnittsflächen und Flächen-Trägheitsmomente (für die Schwerpunktshauptachsen) sind dann durch Ausdrücke von der Form $a\,b\,\delta$ bzw. $\beta\,b^3\,\delta$ gegeben, wobei δ die Wandstärke des Rohres, b eine Längenabmessung, z. B. die Profilbreite, a und β aus einer einmaligen graphischen Ermittlung bestimmte Koeffizienten sind[4]). Kreisrohre werden gewöhnlich in Ovalform verschalt.

Die Streben werden auf Knickung für den Fall beiderseits gelenkiger Lagerung gerechnet, im elastischen Bereich nach Euler, im plastischen nach empirischen Formeln, gewöhnlich nach v. Tetmajer. Häufig führt man außerdem noch eine Spannungsberechnung durch und nimmt hierzu an, daß die Last exzentrisch (mit einem Hebelarm von etwa $^1/_{200}$ der Stablänge) angreift[5]). Sind Stahlrohre (um die Knickgefahr zu verkleinern) mit Holz gefüttert, so ist die Holzfüllung rechnungsmäßig nicht zu berücksichtigen[6]).

[1]) Ratzersdorfer, Zur Knickfestigkeit der Tragflächenholme, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1918. Vergl. ferner: Schleusner, Untersuchung über Knicksicherheit von Holmen, Technische Berichte der Inspektion 1917.

[2]) Ratzersdorfer, Zur Berechnung der Tragflächenholme, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1920. Heft 19. — Siehe ferner Müller-Breslau, Die Berechnung von Tragflächenholmen, Zeitschr. für Flugt. und Motorl. 1918, Heft 17/18. Ueber Knickfestigkeit, Zentralblatt der Bauverwaltung 1919.

[3]) Fillunger, Zur Festigkeitsberechnung von Fourniertragflächen, Oesterr. Flugzeitschrift 1918.

[4]) Trägheits- und Widerstandsmomente der normalisierten Oval- und Rundrohre, k. u. k. Luftfahrarsenal, Wien 1916. Einer graphischen Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten (mit logarithmischen Maßstäben) können die für die Rechnung benötigten Größen unmittelbar entnommen werden. — Vergl. ferner Schröder, Rohrstiele für Flugzeuge, Technische Berichte der Inspektion 1918.

[5]) Vergl. Müller Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1913, 4. Aufl S. 374.

[6]) Vergl. die Versuche: Schlink, Ueber Knickfestigkeit von Stahlrohren mit Holzfüllung, Zeitschrift für Flugt. und Motorl. 1916.

In neuerer Zeit werden vielfach Holzstiele mit Ovalprofil verwendet. Hierbei wird oft der Querschnitt in der Mitte stärker gehalten und so neben einer Erhöhung der Knickfestigkeit eine bequeme Anbringung des Beschlages erzielt. Die Bestimmung des günstigsten Längsschnittes, bei dem bei einem gegebenen Gewicht die Knickfestigkeit ein Maximum wird, führt auf ein von Blasius[1]) behandeltes Variationsproblem. Mit Annahme ähnlicher Querschnitte ergibt sich, wenn a die Querschnittsdicke im Abstand x vom Stabende, a_0 die größte Dicke in der Mitte und l die Stablänge bedeuten, als Gleichung des günstigsten Längsschnittes: $x\frac{\pi}{l} = \arcsin\frac{a}{a_0} - \frac{a}{a_0}\sqrt{1-\left(\frac{a}{a_0}\right)^2}$. Die Knicklast ist um ein Drittel größer als bei einem gleichmäßigen Stab von gleichem Materialverbrauch oder anders formuliert: ein unverjüngter Stab von ähnlichem Querschnitt und gleicher Knickfestigkeit hat ein um rd. 15 vH höheres Gewicht als der verjüngte. Die Ersparnis ist, allerdings nur im Hinblick auf das verhältnismäßig geringe Gesamtgewicht der Stiele eines Flugzeuges, nicht übermäßig groß. Infolge der Wirkung des Beschlages verringert sich noch der Vorteil der Verschiebung des Materials von den Enden gegen die Mitte zu. Angenähert kann man bei verjüngten Stielen die Knicklast für einen Querschnitt zwischen $^1/_3$ und $^1/_4$ der Länge von den Enden entfernt, nach den Formeln des gleichmäßigen Stabes berechnen.

Stahldrähte werden zur Abspannung von kleinen Tragflächen, Steuerflächen und Rümpfen verwendet. Da sie leicht überspannt werden und reißen können, sind bei größeren Kräften Drahtseile oder Kabel, d. h. zusammengesetzte Querschnitte, in Gebrauch. Die Festigkeit der Kabel und der stets stärker bemessenen Spannschlösser wird durch Zugversuche bestimmt.

Infolge von Montagespannungen könnten Haupt- und Gegendiagonalen (z. B. die der Innenverspannung, wenn Felder der Tragfläche mit dem Kabel eingestellt werden) gespannt sein. Die Berechnung der Stabkräfte für das dann statisch unbestimmte System hätte mit Hilfe der Elastizitätsgleichungen von Maxwell-Mohr zu erfolgen. In praxi wird hiervon abgesehen, da bei der zusätzlichen Belastung in der Regel nur eine Diagonale gespannt und die andere schlaff ist.

6. Fahrgestell und Sporn. Die wichtige Aufgabe des Fahrgestells ist es, neben der Ermöglichung von Start und Landung, den Landungsstoß elastisch aufzunehmen. Die Räder erhalten zu diesem Zweck eine Gummibereifung mit Luftpolster, die Radachsen eine Abfederung durch Gummiringe oder Drahtspiralen. Nach v. Mises[2]) ist, mit Annahme des Formänderungsgesetzes, daß jeder Last eine ihr proportionale Deformation entspricht, das Verhältnis der Beanspruchungen durch Stoßwirkung bzw. durch ruhende Last gegeben durch $\frac{v \sin b}{\sqrt{g q}}$, wenn v die Landungsgeschwindigkeit, b die der Landung zugehörige Bahnneigung, g die Schwerebeschleunigung 9,81 m/sk^2 und q die Einsenkung der Radreifen und der Achsaufhängung unter der ruhenden Last des Flugzeuges bedeuten. Für eine »schulmäßige« Landung mit wagrechter Achse von z. B. $v = 25$ m/sk, $b = 6^0\,30'$ wird nun bei einer gebräuchlichen Abfederung von $q = 5$ cm die Beanspruchung beim Landungsstoß das 3,8 fache derjenigen durch das ruhende Flugzeuggewicht. Diese Beanspruchung wird durch das Fahrgestell auf den Rumpf übertragen. Ohne besondere Federung hätten die Fahrgestellstreben bei dieser Landung infolge der Stoßwirkung eine Last aufzunehmen, die vielleicht das 50 fache Flugzeuggewicht wäre; solchen Anforderungen könnte naturgemäß keine Konstruktion genügen.

In praxi wird das Fahrgestell so ausgeführt, daß die Bruchlast etwa beim 10 fachen Flugzeuggewicht erreicht ist. Man pflegt auch die statische Berechnung für die Belastungsfälle: einseitiger Stoß von unten, Stoß von vorn und Stoß von der Seite vorzunehmen[3]). Abb. 9 zeigt ein gebräuchliches Bügelfahrgestell. Bei Annahme gelenkiger Knoten ist es ein einfach statisch unbestimmtes Raumfachwerk, dessen Stabkräfte nach Wahl einer

---

[1]) Blasius, Träger kleinster Durchbiegung und Stäbe größter Knickfestigkeit bei gegebenem Materialverbrauch, Zeitschr. für Mathem. und Physik 1914. — Ueber den besten Längsschnitt verjüngter Stiele, Technische Berichte der Inspektion 1918.

[2]) v. Mises, Fluglehre, Berlin 1918, Abschn. 37. Vergl. a. H. Reissner, Jahrb. d. wissensch. Ges. f. Luftfahrt 1913, S. 95.

[3]) Vergl. die oben genannten amtlichen Vorschriften sowie: Fahrgestell-Berechnung der Prüfanstalt und Werft der Fliegertruppen, 1916.

Ueberzähligen (z. B. der Stabkraft in der Achse) mit Anwendung des Minimumssatzes von Menabrea (oder der Elastizitätsgleichung von Maxwell-Mohr) bestimmt werden. Im Hinblick auf die willkürlichen Belastungsannahmen erscheint auch das übliche Näherungsverfahren gerechtfertigt, bei dem die Achse als beseitigt angesehen wird und die Stabkräfte für das dann statisch bestimmte System berechnet werden. Die Dimensionen der Achse, für die ein Rohr aus Qualitätsstahl verwendet wird, ergeben sich aus der Biegungsbeanspruchung.

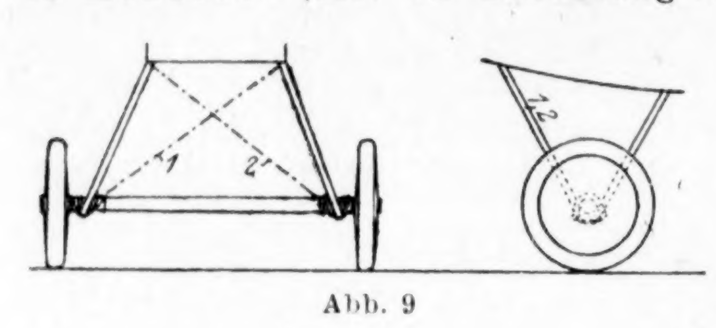


Abb. 9

v. Mises macht auf die interessante Erscheinung aufmerksam, daß oft, wenn beim Aufprallen auf den Boden das Fahrgestell oder sogar das ganze Flugzeug zu Grunde geht, Radreifen und Achsabfederung, also die den ersten Stoß auffangenden Teile unversehrt bleiben. Dies erklärt sich daraus, daß einerseits die Federung nicht vollkommen elastisch ist, andrerseits die Formänderung infolge der Massenträgheit der einzelnen Teile eine gewisse Zeit braucht. Die Zerstörung des Materials tritt erst ein, wenn sowohl Spannung als Formänderung eine gewisse Grenze erreichen. Es können daher die federnden Teile große Kräfte weiterleiten, die sie selbst nicht zum Bruch führen, da die entsprechenden großen Formänderungen sich in ihnen in der kurzen Zeit bis zum Bruch nicht ausgebildet haben.

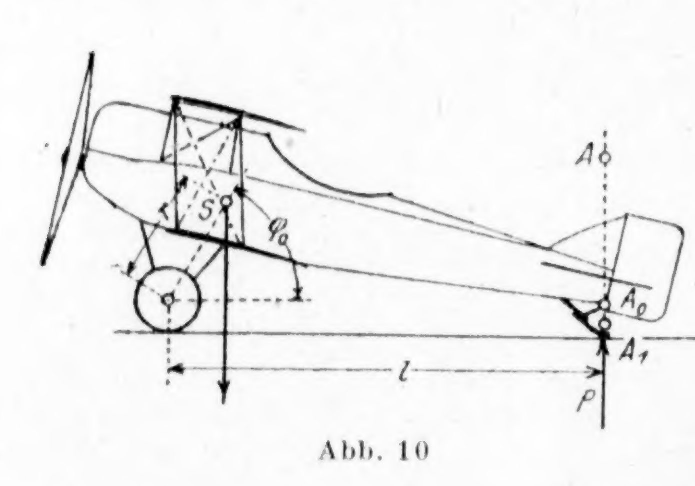


Abb. 10

Auch der Sporndruck wird zufolge der Stoßwirkung ein Vielfaches seines Wertes bei ruhender Last. Der Sporn erhält deshalb, ähnlich wie das Fahrgestell, eine Abfederung[1]). A_0 (φ_0) bezeichne die Lage des Flugzeuges, bei der der Sporn gerade den Boden berührt, Abb. 10. Fällt das Flugzeug bei festgehaltenen Rädern aus der Lage A, bei der der Schwerpunkt S des Flugzeuges um h gegen die Lage A_0 gehoben ist, frei auf den Sporn herab, so beginnt in A_0 die Wirkung der Federung; es treten Schwingungen um die Gleichgewichtslage am Stand A_1 ein. Wenn von einer Dämpfung der Schwingung abgesehen wird, erhält man mit der Annahme, daß der Sporndruck dem Drehungsweg proportional ist, als größten Sporndruck: $P_{max} = P_1 + \sqrt{P_1^2 + P_1 \frac{2\,k\,l\,h}{r \cos \varphi_0}}$. P_1 ist der Sporndruck in der Gleichgewichtslage am Stand, k die Federkonstante, die Bedeutung von φ_0, r und l geht aus der Abbildung hervor. Erfolgt der freie Fall aus der Lage A_0, so ist $h = 0$ und $P_{max} = 2\,P_1$. Fillunger berücksichtigt auch den Einfluß einer Vorspannung der Federung und diskutiert die gewonnenen Resultate. P_{max} ist unvermindert nur von den Teilen des Rumpfes in Spornnähe auszuhalten, bei denen ohnehin ein Ueberschuß an Tragvermögen für Sporndrücke vorhanden ist. Die vom Sporn weiter entfernten Teile werden erst nach einiger Zeit beansprucht und man darf annehmen, daß die Materialfestigkeit mit der Belastungsgeschwindigkeit zugenommen hat. Zahlenmäßige Angaben sind hierüber nicht vorhanden.

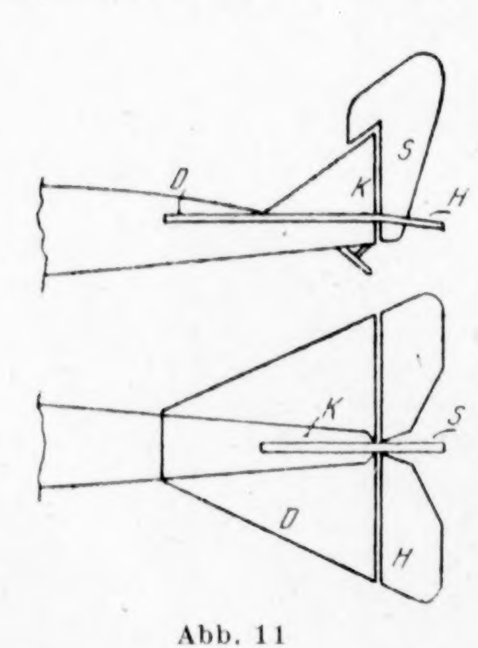


Abb. 11

7. Flossen und Ruder, Innensteuerung. Abb. 11 zeigt Flossen und Ruder, die zusammenfassend auch Leitwerk genannt werden. Als Flossen (oder Flächen) werden die festen Teile, als Ruder (oder Steuer) die beweglichen, durch den Führer während des Fluges einstellbaren bezeichnet. D ist die Höhenflosse (Dämpfungsfläche), K die Seitenflosse (Kielfläche), H das Höhenruder, S das Seiten-

[1]) Fillunger, Theorie der Spornabfederung von Flugzeugen. Oesterr. Flugzeitschrift 1918.

ruder[1]). Häufig sind die Leitwerkteile als Stahlrohrrahmen ausgebildet, die mit Stoff bespannt werden; Höhen- und Seitenflosse sind gegen den Rumpf durch Streben abgestützt. Es wird aber die Höhenflosse auch freitragend aus Holz hergestellt; sie besteht dann wie eine Fourniertragfläche aus Holmen und Rippen mit einer Sperrholzverkleidung.

Für die Festigkeitsrechnung wird als angreifende Kraft pro Flächeneinheit die spez. Tragflächenbelastung für Steigflug angenommen; mitunter auch überschlagsweise eine Bruchlast von 300 kg/m². Gewöhnlich begnügt man sich damit, die Rohre einzeln als Biegungsträger zu rechnen und die Ruderachsen auf Drehfestigkeit zu untersuchen. Die freitragende Höhenflosse ist ein auf Biegung beanspruchter Konsolträger. Auch die Querruder, s. Abb. 1, werden ähnlich berechnet.

Die Organe der Innensteuerung, d. h. Fußsteuer, Steuersäule, Handrad bzw. Knüppel, sowie die Steuerleitung, d. h. die zu den Rudern führenden Stangen und Seile, müssen der Belastung der bezüglichen Ruder angepaßt sein. Man geht bei der Bemessung aber auch von den an Hand- und Fußsteuern bei der Betätigung wirkenden Kräften aus Vielfach überzeugt man sich versuchsweise von der vorhandenen Festigkeit des Leitwerks und der Innensteuerung.

8. Rumpf. Der Rumpf (oder das Boot) hat die Motoranlage, die Behälter, die Bemannung und sonstige Belastung aufzunehmen. An den Rumpf sind das Tragwerk, das Fahrgestell, der Sporn und die Flossen (event. Ruder) angeschlossen. Innerhalb des Rumpfes befindet sich die Innensteuerung und die Steuerleitung.

Der Rumpf besteht in der Regel aus vier hölzernen Längsträgern (Holmen), die in Abständen von etwa 50 cm durch vertikale und horizontale Querstäbe (Spante) verbunden sind. Bei »Sperrholzrümpfen« ist über dem Gerippe der Holme und Spanten eine Sperrholzbeplankung angebracht. Abgespannte oder »Gitterrümpfe« erhalten zwischen den einzelnen Spanten in jeder Ebene eine diagonale Drahtverspannung. Die Verkleidung ist Stoff oder ebenfalls Sperrholz. Auch Stahlrümpfe sind in Verwendung.

Die statische Berechnung wird für die Beanspruchung am Stand und im Steigflug mti einer 8- bis 10fachen Bausicherheit durchgeführt. Am Stand ruht der Rumpf auf Fahrgestell und Sporn, die angreifenden Kräfte ergeben sich aus der Gewichtsverteilung. Für den Flug wird angenommen, daß der Rumpf an der Tragfläche hängt. Als wirkende Kräfte kommen in Betracht: Eigengewicht, Druck auf Höhenflosse und Höhenruder und seitlicher Druck auf Seitenflosse und Seitenruder mit der spez. Tragflächenbelastung pro Flächeneinheit (oder mit der Bruchlast von 300 kg/m²) und die Belastung auf Rumpfoberseite.

Bei Gitterrümpfen berechnet man die Stabkräfte der Holme und Diagonalen[2]). Den Sperrholzrumpf betrachtet man angenähert als homogenen, auf Biegung beanspruchten Stab. Ist z. B. h der vertikale Abstand der Holme, so ist im betreffenden Schnitt das Trägheitsmoment von vier gleichen Holmen mit der Querschnittfläche f für die wagrechte Schwerachse $\frac{f h^2}{4}$. Von einer nachträglichen Berücksichtigung der Torsion sieht man oft ab, da die größten Biegungsspannungen nicht an derselben Stelle wie die größten Torsionsspannungen auftreten. Das Fournier wird keinesfalls in Rechnung gestellt.

Die im Rumpf untergebrachten Behälter und der Motor werden fest verankert und die Befestigung gewöhnlich mit 20facher Sicherheit konstruiert. Besonders widerstandsfähig wird der im Bereich der Insassen und des Motors liegende Teil ausgebildet.

9. Luftschrauben oder Propeller. Ueber die Berechnung der Luftschrauben auf Festigkeit sollen hier nur wenige Andeutungen genügen; weitere Ausführungen müssen einem besonderen Bericht vorbehalten bleiben. Fast ausschließlich werden zweiflügelige (selten vierflügelige) Luftschrauben aus Holz verwendet. Abb. 12 zeigt die Ansicht und den einem Tragflächenprofil entsprechenden Querschnitt eines gewöhnlichen Propellers.

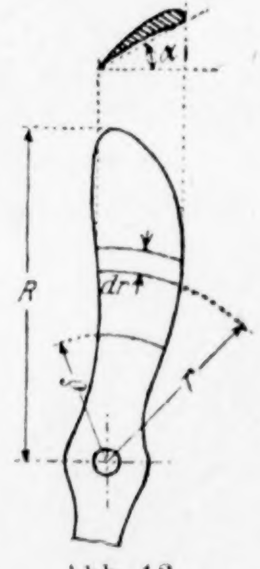


Abb. 12

Die Flügel der Luftschrauben können als elastische, stabförmige Körper aufgefaßt werden, die durch die Luftkraft und Fliehkraft auf

[1]) Vergl. v. Mises, Fluglehre, Berlin 1918, Abschn. 26 und 29.

[2]) Vergl. Zschetzsche, Beitrag zur Berechnung von Tragwerken mit veränderlicher Höhe Zeitschr. des österr. Ing.- und Arch.-Vereins 1895.

Biegung und gleichzeitig durch die Fliehkraft auf Zug beansprucht sind. Der Kraftangriff ist ähnlich dem eines gezogenen Holmes und Reißner[1]) berücksichtigt die durch Querlast und Zugkraft entstehende Ausbiegung. In der Nähe der Nabe, von der Schraubenachse bis in eine Entfernung von ca. 0,3 des Radius muß aus konstruktiven Gründen eine größere Stärke eingehalten werden, als es der Festigkeit entspricht, ebenso an der Flügelspitze, wo schwächere Ausführungen leicht ein sogen. Flattern zur Folge haben. Der zweckmäßigen Dimensionierung ist somit nur ein begrenzter Teil zugänglich und es kann daher der Einfachheit halber die Ausbiegung außer acht gelassen werden.

Die Rechnung wird erleichtert, wenn sämtliche Luftschraubenquerschnitte etnander ähnlich angenommen sind. Für ein bestimmtes Profil können dann (nach einer einmaligen graphischen Ermittlung) Flächeninhalt, Trägheits- und Widerstandsmomente sämtlicher Querschnitte aus Profilbreite und -höhe berechnet werden[2]). Als gegeben werde angesehen: Radius R, Steigungswinkel α und Blattbreite der Luftschraube, die Tourenzahl am Stand n pro Minute bei der Motorleistung L in PS und die Flugzeuggeschwindigkeit v m/sk, die mit der Luftschraube erzielt werden soll. Die Querschnittshöhen sind gesucht.

Zur Gewinnung einfacher Ausdrücke nehmen wir näherungsweise eine mittlere Blattbreite an. Betrachtet man die Verhältnisse am Stand für die Festigkeitsrechnung als maßgebend und setzt man die Zugkraft am Stand doppelt so groß an wie im Flug, so erhält man für den Querschnitt im Abstand ϱ von der Luftschraubenachse zufolge der Luftkraft die Biegungsmomente bezüglich der Schwerpunktsachsen parallel und senkrecht zur Profilsehne:

$M_1 = \psi\left(\frac{Z R}{4}\cos\alpha + \frac{M}{6}\sin\alpha\right)$ und $M_2 = \psi\left(\frac{Z R}{4}\sin\alpha - \frac{M}{6}\cos\alpha\right)$. Hierbei sind: $\psi = 3 - 4\frac{\varrho}{R} + \left(\frac{\varrho}{R}\right)^4$, Z die Zugkraft eines Flügels $75\,\eta\,\frac{L}{v}$, M das vom Motor erzeugte Drehmoment $716\frac{L}{n}$ kg m, η der Wirkungsgrad des Propellers gleich 75 bis 80 vH. In dem Teil des Propellers, der untersucht werden soll, ist das resultierende Biegungsmoment nahezu zusammenfallend mit dem Biegungsmoment M_1 und es kann deshalb die Rechnung auf den Fall der normalen Biegung durch M_1 zurückgeführt werden.

Für den Querschnitt ϱ von Propellermitte entfernt ist die Fliehkraft $C_\varrho = \varkappa\int_{r=\varrho}^{R} f_r\, r\, dr$ und das Moment der Fliehkraft $M_\varrho = \varkappa\int_{r=\varrho}^{R} f_r\, r\, c\, dr$. Es sind: $\varkappa = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2$, γ das spez. Gewicht der Luftschraube, f_r der Luftschraubenquerschnitt im Abstand r von der Drehachse und c der Abstand des Schwerpunkts eines Querschnitts vom Schwerpunkt des Schnittes ϱ, senkrecht zur Profilsehne des Schnittes ϱ gemessen. Ist der Propeller in seinen Dimensionen festgelegt, so können die beiden Integrale graphisch ausgewertet werden.

Der Querschnitt f_ϱ ist durch das Biegungsmoment $M_1 - M_\varrho$ und die Zugkraft C_ϱ ergriffen, die Spannungen sind für die kombinierte Beanspruchung »Zug, Biegung» zu bestimmen. Man geht so vor, daß man vorläufig die Fliehkraftwirkung unberücksichtigt läßt und angenäherte Werte der Querschnittshöhen berechnet, diese dann im Durchschnitt um ca. 10 vH abmindert und für den hierdurch gegebenen Propeller die genaueren Spannungswerte aufsucht.

10. Beschläge und andere Teile. Die den Zusammenschluß der einzelnen Organe vermittelnden Konstruktionen, die Beschläge, müssen sorgfältig konstruiert werderden und es wird zweckmäßig ihre Festigkeit durch Zerreißproben kontrolliert. Viele Brüche sind auf mangelhafte Knotenpunktskonstruktionen zurückzuführen. Teile des Flugzeuges, die bei der Beförderung, bei der Montage oder durch Unvorsichtigkeit leicht verletzt werden können, werden entsprechend reichlich dimensioniert.

11. Bruchproben. Wiederholt wurde im Laufe dieser Darlegungen bemerkt, daß man sich von den Festigkeitseigenschaften der verwendeten Materialien, sowie von der Festigkeit einzelner Flugzeugteile durch Versuche überzeugt. Es ist dies der gewöhn-

[1]) Reißner, Ueber die Biegungsbeanspruchung von Schraubenpropellern und die entlastende Wirkung der Zentrifugalkraft, Technische Berichte der Inspektion 1918. — Vergl. ferner Dietzius, Untersuchung von Luftschrauben auf Festigkeit und richtige Formgebung, Technische Berichte der Inspektion 1919.

[2]) Festigkeitsberechnung von Luftschrauben, k. u. k. Fliegerarsenal, Wien 1917.

liche Vorgang der Materialprüfung und es wird bei der Untersuchung eine der Wirklichkeit möglichst angenäherte Belastung hergestellt. Im Flugzeugbau wird aber, hauptsächlich wegen der großen Unsicherheit in den Annahmen über die Materialkonstanten, die zulässigen Belastungen usw., auch eine Bruchprobe des ganzen Tragwerks, d. h. der Zelle und der Pyramide, vorgenommen, ein Versuch, der zugleich eine Kontrolle für die Richtigkeit der Festigkeitsrechnung bildet. Gewöhnlich wird die Belastungsprobe für den Steigflug ausgeführt[1]).

Wenn man vom gesamten Flugzeuggewicht G das Gewicht G_1 der Tragzelle abzieht, so erhält man, wie eingangs beschrieben, die beim normalen Flug die Zelle angreifende Last. Man wendet nun das Flugzeug um, unterstützt den Rumpf an den Stellen, wo im Betrieb die größten Lasten, wie Motor, Bemannung und Benzinvorrat liegen, so daß bei Belastung im Rumpf eine ähnliche Beanspruchung wie im Flug (d. h. ein ähnlicher Verlauf der Biegungsmomente und Querkräfte) hervorgerufen wird. Erreicht wird dies einfach durch Anwendung eines Satzes von Wagebalken(Balance)trägern; zweiarmige Hebel bzw. einfache Balken übertragen die Unterstützungskräfte in statisch bestimmter Weise. Bei der Bruchprobe werden die jetzt nach oben gekehrten Flügelunterseiten mit Gewichten, gewöhnlich mit Sand belastet. Um den Zustand für normalen Steigflug zu erreichen, ist insgesamt ein Gewicht von $G - 2\,G_1$ aufzubringen, da das Gewicht G_1 der Zelle im Sinne der Belastung wirkt. Bei der in der Regel für Steigflug geforderten fünffachen Bausicherheit darf also die Konstruktion erst bei einer Sandlast von $5\,G - 6\,G_1$ ihre Tragfähigkeit verlieren.

Die Herstellung eines Flugzeuges ist heute fast ausschließlich eine Konstruktionsangelegenheit geworden. Ebenso wie bei Tragwerken des Hoch- oder Brückenbaues wird auf Grund der statischen Berechnung eine Dimensionierung der einzelnen Organe vorgenommen. Beim Bau größerer Flugzeuge tritt die Notwendigkeit der sachgemäßen Berechnung auch augenfällig zutage. Wir wollen jedoch hiermit keineswegs die Rolle der Statik überschätzen. Nur die richtige Umsetzung aeromechanischer Erkenntnisse in die Praxis, der Bau leichter Motore und insbesonders Ausdauer und Entschlossenheit mutiger Flieger haben es bewirkt, daß »zu des Geistes Flügeln auch körperliche Flügel sich gesellen«. 3

Über neuere Lehrbücher der praktischen Analysis.

Von **L. BIEBERBACH** in Frankfurt a. M.

Läßt man das Auge über die Titel der im vergangenen Jahrzehnt erschienenen Lehrbücher aus dem Gebiete der praktischen Mathematik gleiten[2]), so fällt auf den ersten Blick das Vorwiegen des Graphischen auf. Graphische Methoden nennt denn auch Runge, dem das ganz neue Gebiet ein gut Teil seines Lebensbewußtseins verdankt, sein jetzt in zweiter deutscher Auflage vorliegendes Buch, das aus in Amerika gehaltenen Vorträgen hervorgegangen ist. Leitfaden zum graphischen Rechnen nennt Mehmke sein in der gleichen Teubnerschen Sammlung mathematischer und physikalischer Schriften für Studierende und Ingenieure erschienenes Werk. Ueber graphische Integration schreibt Willers, einer der leider wenigen auf unserm Gebiete bewanderten Oberlehrer, ein Bändchen für die Sammlung Goeschen. »Praktische Analysis« freilich nennt der Vertreter der Mathematik an der Bergakademie in Clausthal, v. Sanden, sein Büchlein, das gleichfalls im Teubnerschen Verlag erschienen ist; doch schon ein Blick aufs Inhaltsverzeichnis läßt erkennen, daß der Verfasser trotz seines Strebens aufs Ganze das Graphische nicht weniger betont als die übrigen Autoren. Neben diesem Vorwiegen des Graphischen fällt die bewußte Einstellung auf die Probleme der Analysis sofort in die Augen, sowie man nur einen Vergleich mit den nur wenig älteren Lehrbüchern von Biermann, Bruns, Lüroth über numerisches Rechnen versucht. Die Methoden der mechanischen Quadratur sind das einzige, was dort zur Bewältigung der Probleme vor-

[1]) Saliger, Vorträge über Statik des Flugzeugbaues, k. u. k. Fliegerarsenal, Wien 1916. — Hoff, Verfahren bei Flügelfestigkeitsprüfungen, Zeitschr. f. Flugt. und Motorl., 1916.

[2]) C. Runge, Graphische Methoden, 2. Aufl., Leipzig 1919; R. Mehmke, Leitfaden zum graphischen Rechnen, Leipzig 1917; A. Willers, Graphische Integration, Leipzig 1920; H. v. Sanden, Praktische Analysis, Leipzig 1914.

getragen wird, welche die Mittel der Analysis verlangen. Geht man im Vergleich mehr aufs Einzelne, so wird man sofort hinsichtlich der Auswahl von Vergleichspunkten in Verlegenheit kommen. Damit wird nicht bestritten, daß Vorläufer im einzelnen für den Gegenstand der genannten Werke da sind, aber bewußt neu ist die Verarbeitung der Einzelheiten zu einem neuen aussichtsvollen Gebiet mathematischer Forschung; bewußt neu ist die Tendenz: die Durcharbeitung der rein mathematischen Methoden bis zur praktischen Brauchbarkeit.

Dem Zurückgehen auf den Ausgangspunkt, wie es Felix Klein seit fast 40 Jahren verlangt, verdankt die neue Richtung ihr Leben. Die Praxis in Physik, Technik usw. stellt der mathematischen Forschung bestimmte Probleme. Aber Steine statt Brot erhielt sie meist von dieser als Gegengabe. Es muß gehen, sagen die reinen Mathematiker, aber fragt mich nur nicht wie, mir genügt es zu wissen, daß es geht. Da setzt die neue Richtung ein. Sie besitzt zu viel Disziplin, um sich mit so oberflächlicher Antwort zu begnügen. Sie will aus der potentiellen eine aktuelle Möglichkeit machen und die mathematischen Methoden wirklich so durcharbeiten, daß man sie handhaben kann, und daß man das numerische Ergebnis erzielen kann, an dem der Praxis gelegen ist.

1. Gleichungs-Auflösung. Ich will an ein paar Beispielen zeigen, wie die Moderne hier ihrer Aufgabe gerecht wird. Ich beginne mit einem Problem der Algebra. Wie löst man eine Gleichung dritten Grades auf? Wer einen schlechten Unterricht auf Schule oder Hochschule genossen hat, dem fällt, wenn überhaupt etwas, so in erster Linie die Cardanische Formel ein. Betrachten wir z. B. die Gleichung

$$x^3 + 2{,}1 \cdot x^2 + 3{,}4 \cdot x - 1{,}7 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Will man die Cardanische Formel anwenden, so hat man zunächst durch die Substitution

$$x = z - 0{,}7$$

zur Gleichung

$$z^3 + 1{,}93\, z - 3{,}394 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

überzugehen. Will man die reelle Wurzel nun wirklich auf drei Dezimalen genau bestimmen, so wird man auf die dritte Stelle hinter dem Komma in dem letzten Koeffizienten nicht verzichten dürfen. Rechnet man nach der Vorschrift der Cardanischen Formel, so bestimmt man zunächst

$$\frac{(3{,}394)^2}{4} + \frac{(1{,}93)^3}{27} = 3{,}146,$$

alsdann

$$\sqrt{3{,}146} = 1{,}774,$$

ferner

$$\frac{3{,}394}{2} \pm 1{,}774 = \begin{matrix} +\,3{,}471 \\ -\,0{,}077 \end{matrix},$$

endlich

$$z = \sqrt[3]{3{,}471} - \sqrt[3]{0{,}077} = 1{,}089 \pm \frac{1}{10^3}.$$

Also ist

$$x = 0{,}389 \pm \frac{1}{10^3}.$$

Wenn man auch vielleicht auf trigonometrischem Wege diese Rechnung ein wenig abkürzen kann, so bleibt doch die Frage offen, ob die Cardanische Formel nicht durch eine bessere Rechenvorschrift ersetzt werden kann. Denn es ist doch auffällig, daß man erst eine gewisse vielleicht vermeidbare Rechenarbeit durch die Aufstellung der Formel ein für allemal leisten muß. Könnte man nicht mit dem Berechnen der Wurzel unmittelbar an die Gleichung anknüpfen? Das geht in der Tat und die Erledigung dieser Frage hat zu sehr brauchbaren Methoden der Auflösung geführt. Der Gedanke, welcher der besten Methode zugrunde liegt, ist sehr einfach. Man bewältigt das Problem durch rationelles Probieren. Das Prinzip des Probierens aber ist dieses: Merkt man beim Einsetzen zweier verschiedener x-Werte in die Gleichung, daß ihre linke Seite Werte von verschiedenem Vorzeichen erhält, so weiß man, daß zwischen beiden x-Werten Wurzeln liegen müssen. Man wird nun bestrebt sein, durch Fortsetzung des Probierverfahrens die Wurzeln in immer engere Grenzen einzuschließen, bis man die gewünschte Genauigkeit erreicht hat.

Dies Probieren kann langwierig sein, wenn man nicht 1) die dazu nötigen Rechnungen möglichst geschickt und rasch auszuführen versteht, wenn man 2) die versuchsweise anzusetzenden Werte nicht nach vernünftigen Gesichtspunkten auswählt.

Die Rechnungen werden am bequemsten nach dem Hornerschen Schema ausgeführt, d. h. man rechnet so, wie es die folgende Schreibweise andeutet:

$$f(x) = x^3 + 2{,}1\,x^2 + 3{,}4\,x - 1{,}7 = [(x + 2{,}1)\,x + 3{,}4]\,x - 1{,}7.$$

Am übersichtlichsten notiert man sich das so:

1	2,1	3,4	$-1{,}7$
	$1 \cdot x$	$(2{,}1 + x)\,x$	$x\,[(2{,}1 + x)\,x + 3{,}4]$
	$2{,}1 + x$	$(2{,}1 + x)\,x + 3{,}4$	$f(x)$

Diese Art des Rechens bietet namentlich bei Verwendung des Rechenschiebers den ersichtlichen Vorteil, daß man mit ein und derselben Zungenstellung auskommt.

Die Auswahl der zum Probieren heranzuziehenden x-Werte gelingt am besten, wenn man die eben angegebene Rechnung graphisch ausführt, weil man da am besten den Einfluß einer x-Aenderung auf den Funktionswert zu beurteilen vermag. So gelangt man zu dem bewährten Lillschen Rechtwinkelverfahren, dem ich vor andern gleichfalls möglichen den Vorzug geben möchte.

Man trägt die Koeffizienten in irgend einer Einheit in einen rechtwinkligen Streckenzug ab derart, daß jede Strecke einen Koeffizienten zur Maßzahl hat und daß man beim Uebergang zum folgenden Koeffizienten eine Rechts- oder eine Linksschwenkung auszuführen hat, je nachdem, ob beide gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben. Für unsere Gl. (1) kommt so Abb. 1 zum Vorschein.

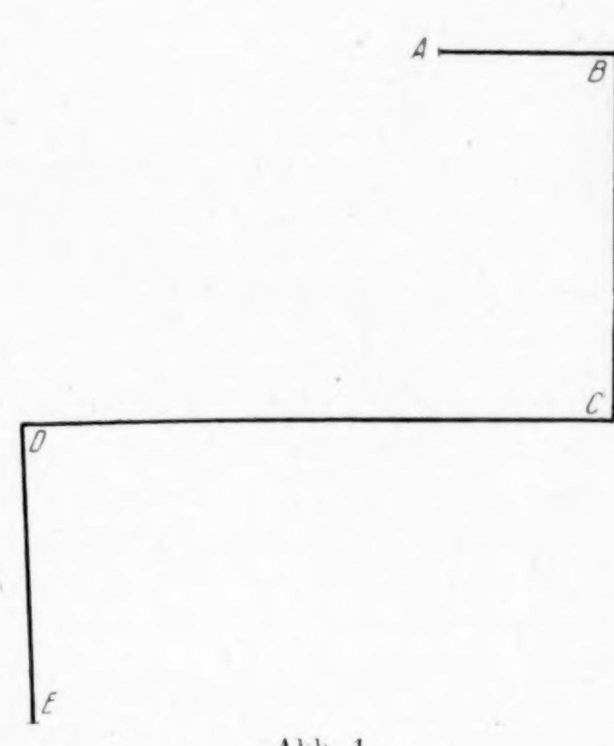


Abb. 1

Nun wählen wir einen beliebigen x-Wert (x_0) aus, den wir in der gewählten Einheit auf der aus Abb. 2 ersichtlichen x-Skala markieren. $x + 2{,}1$ ist nun sofort in der Abbildung als vertikale Strecke QC zu bemerken. Nun gehen wir senkrecht zu der Verbindungslinie AQ nach R auf der Geraden DC. CR hat dann die Länge $(x + 2{,}1)\,x$, weil die beiden Dreiecke ABQ und QCR ähnlich sind. DC entspricht dann $x\,(x + 2{,}1) + 3{,}4$. Nun hat man noch ein letztes Mal mit x zu multiplizieren. Dazu geht man wieder senkrecht zu QR vor bis nach S auf der letzten Koeffizientengeraden. Auf der y-Skala liest man dann den x_0 entsprechenden Funktionswert ab. Wünscht man also eine Wurzel der Gleichung zu bestimmen, so muß man x_0 so wählen, daß S mit E zusammenfällt. Das muß man durch Probieren zu erreichen suchen.

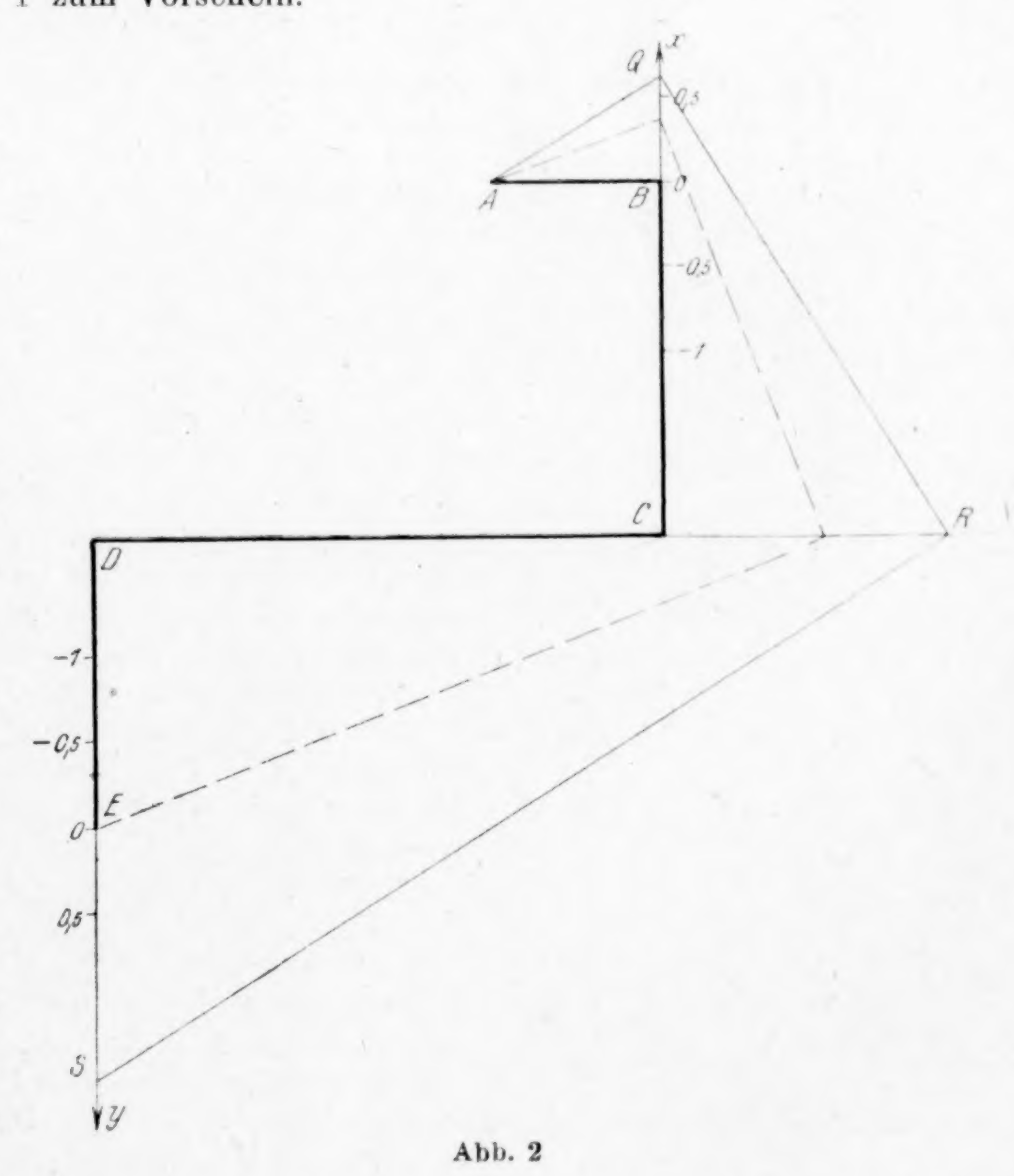


Abb. 2

Es ist nun aber das Berechnen des Funktionswertes, welcher einem ausgewählten x-Wert entspricht, so einfach und übersichtlich geworden, daß man in kürzester Frist aus freier Hand skizzierend eine große Zahl von ungefähren Proben machen kann. Hat man dann mit einiger Sicherheit eine Wurzel gefunden, so wird man sorgfältiger zeichnen und die Genauigkeit erhöhen. Bei der Ausführung bietet es erhebliche Erleichterung, wenn man eine Millimetereinteilung aus durchscheinendem Papier benutzt. Dies Blatt bewegt man dann über dem Blatt, auf dem der Koeffizientenzug verzeichnet ist, und verfolgt den Rechnungszug längs der Einteilungslinien des durchscheinenden Blattes. Hat man so die Wurzel mit der möglichen Genauigkeit festgestellt, so kennt man ein enges Intervall, dem sie angehört. Dann kann man leicht die Regula falsi verwenden, um eine weitere Verbesserung zu erzielen. Den lösenden Zug unseres Beispieles haben wir in Abb. 2 gestrichelt eingezeichnet. Man liest $x = 0{,}38$ ab. Rechnet man den zugehörigen Funktionswert nach dem Hornerschen Schema aus, so findet man $-0{,}049888$. Der Wurzelwert ist also zu klein. Für $x = 0{,}4$ aber erhält man nach der Zeichnung einen deutlich positiven Wert, den man zu $0{,}06$ berechnet. Also liegt die Wurzel zwischen $0{,}38$ und $0{,}4$. Wir haben so wesentlich bequemer dieselbe Genauigkeit wie bei der Cardanischen Formel erreicht. Die Regula falsi liefert als neuen Näherungswert

$$x_1 = 0{,}38 + 0{,}02 \cdot \frac{0{,}049888}{0{,}109888} = 0{,}3891.$$

Man findet $f(x_1) = -0{,}0002$.

Ueber das Lillsche Verfahren, dessen besonderer Vorzug auch die unveränderte Anwendbarkeit auf Gleichungen beliebigen anderen Grades ist, mag man sich noch näher in den genannten Büchern informieren oder auch in Mehmkes Artikel im ersten Band der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, oder auch in Scheffers Lehrbuch der Mathematik. Dagegen wird man in den auf technischen Hochschulen und Universitäten üblichen einführenden Büchern über höhere Mathematik oder Algebra leider vergeblich nach dem Verfahren suchen.

In den erwähnten Werken wird man noch manche andere Methoden finden. Diese laufen auf ein Aufzeichnen der Kurve

$$y = x^3 + 2{,}1\,x^2 + 3{,}4\,x - 1{,}7$$

in rechtwinkligen Koordinaten hinaus. Einige Vorteile bietet dabei die Verwendung logarithmisch geteilten Papiers, wie man das bei der Lektüre des Mehmkeschen Buches bemerken wird. Jedenfalls aber verlangt dies logarithmische Verfahren Mehmkes darüber hinaus besondere Zurichtungen (Additionslogarithmen), während das Lillsche Verfahren ohne weiteres anwendbar ist.

Genügt die hiermit zu erzielende Auflösungsgeschwindigkeit noch nicht allen Ansprüchen, oder hat man sehr oft Gleichungen gleicher Bauart aufzulösen, möchte man die Wurzeln ebenso rasch und bequem finden, wie man etwa einen Logarithmus aufschlägt, so muß man eine Tafel, ein Nomogramm der Gleichungen dritten Grades, herstellen. Die besten beruhen auf folgendem Prinzip:

Wir legen eine gerade Linie durch ihre Abschnitte u, v auf zwei parallelen Geraden fest. Wir nennen die u, v Koordinaten der geraden Linie. Einer linearen Gleichung zwischen u und v entspricht dann eine Schar von geraden Linien. Sieht man näher zu, so bemerkt man, daß die Geraden alle durch einen Punkt gehen, der dann also durch die lineare Gleichung bestimmt ist; diese heißt dann Gleichung des Punktes.

Abb. 3

Um die Behauptung einzusehen, braucht man nur einen Blick auf die beiden ähnlichen Dreiecke der Abbildung 3 zu werfen. Dann liest man sofort die Proportion

$$\frac{\eta - v}{\eta - u} = \frac{\xi - \delta}{\xi + \delta}$$

ab. Daraus aber folgt

$$v\,(\xi + \delta) + u\,(\delta - \xi) - 2\,\eta\,\delta = 0$$

als Bedingung dafür, daß eine Gerade mit den Koordinaten u und v durch den Punkt P mit den rechtwinkligen Koordinaten (ξ, η) geht. Vergleicht man die gefundene mit einer beliebigen linearen Gleichung

$$a\,v + b\,u + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

so erhält man die Proportion

$$a : b : c = \xi + \delta : \delta - \xi : -2\,\eta\,\delta$$

und daraus findet man, daß Gl. (3) die Gleichung des Punktes

$$\xi = \delta\,\frac{a-b}{a+b},\quad \eta = -\frac{c}{a+b}$$

ist. Die kubische Gleichung

$$x^3 + u\,x + v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

denken wir uns durch eine Gerade mit den Koordinaten u und v dargestellt. Soll diese Gleichung eine Wurzel x_0 besitzen, so muß die Gerade durch den Punkt P_0:

$$\xi = \delta\,\frac{1-x_0}{1+x_0},\quad \eta = \frac{-x_0^3}{1+x_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

gehen. Allen kubischen Gleichungen mit der Wurzel x_0 entsprechen also gerade Linien durch diesen Punkt, und wenn eine Gerade durch diesen Punkt geht, so hat eben die ihr entsprechende kubische Gleichung die Wurzel x_0. Die den verschiedenen Wurzeln entsprechenden Punkte kann man aber ein für allemal markieren. Sie gehören alle einer Kurve an, die in Gl. (5) in Parameterdarstellung angegeben ist. Ihr den positiven x-Werten entsprechender Ast ist in Abb. 4 annähernd angedeutet. Eine vollständige, maßstabrichtige Ausführung dieser Zeichnung stellt das Nomogramm der dreigliedrigen kubischen Gleichung (4) dar.

Will man auch negative Wurzeln mit Hilfe des Nomogramms bestimmen, so braucht man nur in der Gleichung (4) x durch $-x$ zu ersetzen. Durch eine gestrichelte Linie in Abb. 4 habe ich die Gleichung (2), die uns früher beschäftigte, angedeutet.

Das geschilderte Verfahren läßt sich natürlich auf beliebige Gleichungen der Gestalt $f(x) + u\,g(x) + v\,h(x) = 0$ ausdehnen. Aber an die allgemeine Gleichung

$$x^3 + u\,x^2 + v\,x + w = 0$$

dritten Grades kommt man so nicht heran. Will man sie nomographisch darstellen, so muß man entweder eine Umrechnung vornehmen auf eine Gleichung mit nur zwei willkürlichen Koeffizienten, etwa durch Wegschaffen des quadratischen Gliedes, oder man muß sich für jeden Wert von w eine besondere Lösungskurve zeichnen. Ein derartiges Nomogramm findet der Leser in Mehmkes Artikel im ersten Bande der mathematischen Enzyklopädie.

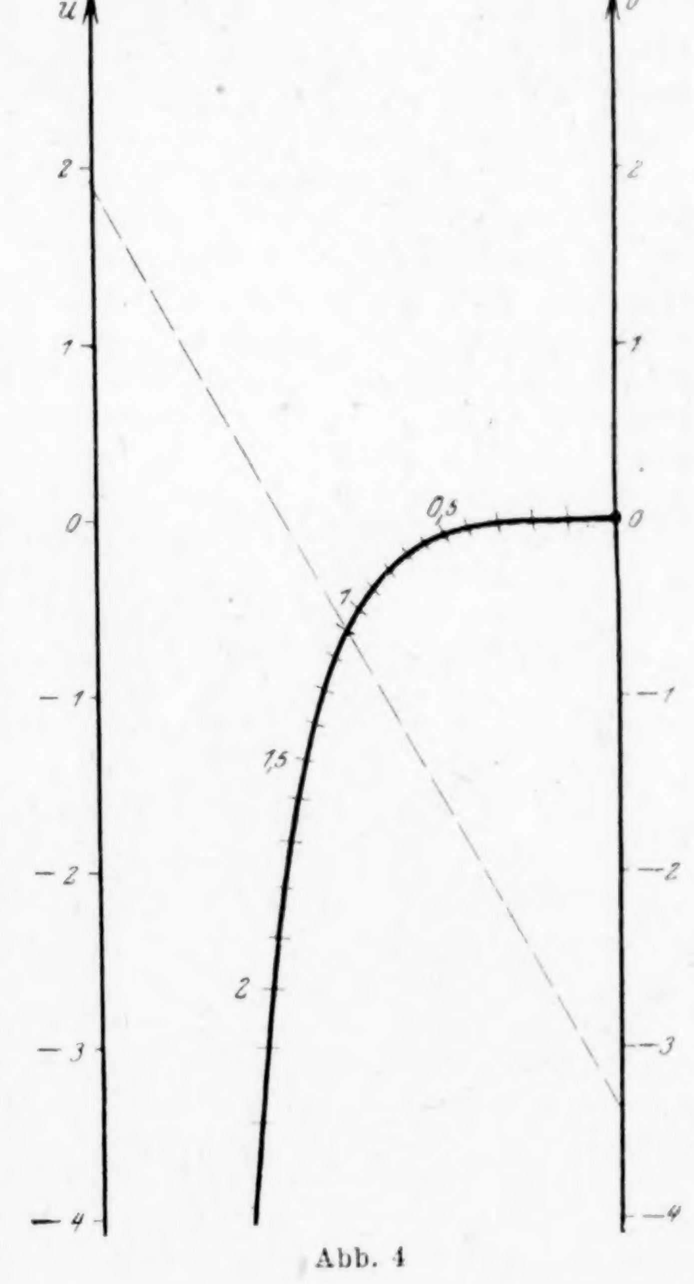
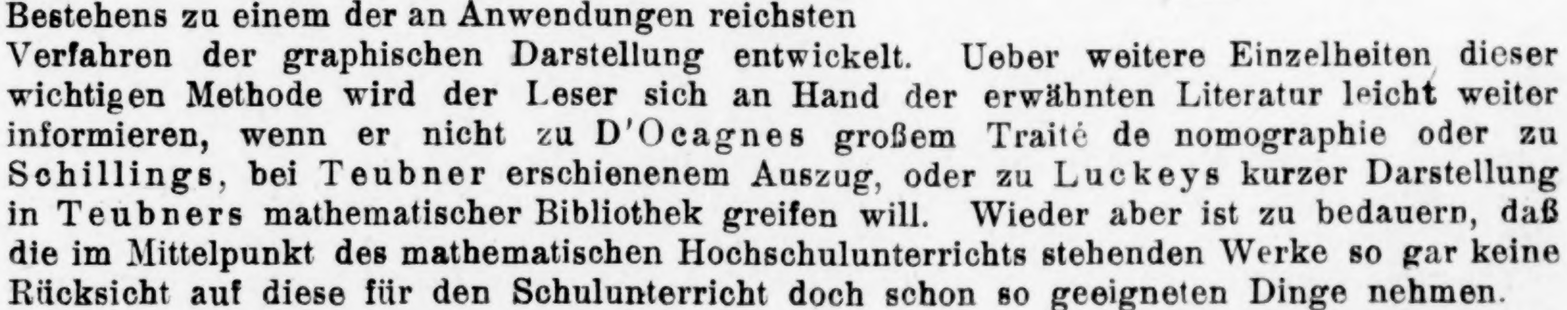


Abb. 4

Die hiermit knapp angedeutete Nomographie hat sich in den wenigen Jahrzehnten ihres Bestehens zu einem der an Anwendungen reichsten Verfahren der graphischen Darstellung entwickelt. Ueber weitere Einzelheiten dieser wichtigen Methode wird der Leser sich an Hand der erwähnten Literatur leicht weiter informieren, wenn er nicht zu D'Ocagnes großem Traité de nomographie oder zu Schillings, bei Teubner erschienenem Auszug, oder zu Luckeys kurzer Darstellung in Teubners mathematischer Bibliothek greifen will. Wieder aber ist zu bedauern, daß die im Mittelpunkt des mathematischen Hochschulunterrichts stehenden Werke so gar keine Rücksicht auf diese für den Schulunterricht doch schon so geeigneten Dinge nehmen.



2. Differentialgleichungen. Die Tendenz, die mathematischen Methoden bis zur praktischen Brauchbarkeit durchzubilden, hat in neuester Zeit auch im Gebiete der engeren Analysis Erfolge zu zeitigen begonnen. Freilich sind noch lange nicht alle, vielmehr nur die allerwenigsten Probleme der Analysis im Besitze einer wirklich fertig

durchgebildeten Methodik. In besonders glücklicher Lage ist man durch Runge in der Theorie der Differentialgleichungen, insbesondere bei den gewöhnlichen. Die Problemlage ist hier ähnlich wie in der Algebra. Man verfügt seit Alters über geschlossene Integrationen, über Existenztheoreme, also letzten Endes über Auflösungsvorschriften, bei denen aber praktisch Brauchbares und Unbrauchbares wahllos durcheinander geht. Doch schon eine Sichtung der Methoden führt hier zu brauchbaren Ansätzen. Die Cauchysche Polygonmethode, die Methode der Näherungsfolgen (successive Approximation), die Uebertragung der Simpsonschen Regel durch Runge, Heun und Kutta sind die kurzen Namen der praktischen Verfahren, die wir nun flüchtig besprechen wollen. Die sogen. Integration von

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

durch geschlossene Ausdrücke ist in der Regel nicht möglich und erweist sich in den meisten Fällen, in denen sie theoretisch existiert, für die Praxis wie die Cardanische Formel als Fata morgana.

Die geometrische Bedeutung der Differentialgleichung (6) ist diese: Sie ordnet jedem Punkte in rechtwinkligen (x, y)-Koordinaten eine Richtung $f(x, y)$ zu, d. h. eine Gerade, deren Winkel mit der positiven x-Achse die trigometrische Tangente $f(x, y)$ hat. Die Differentialgleichung integrieren bedeutet geometrisch: Man suche Kurven, welche durch jeden ihrer Punkte in der dort vorgeschriebenen Richtung hindurchgehen. Man findet somit sofort eine Näherung an die Integralkurve durch den Punkt (x_0, y_0), wenn man von (x_0, y_0) ein Stück in der Richtung $f(x_0, y_0)$ vorgeht, bis (x_1, y_1), von da ein Stück in der Richtung $f(x_1, y_1)$ bis (x_2, y_2) usw. Man kann in manchen Fällen diese Zeichnung besonders bequem ausführen, indem man sich die Isoklinen $f(x, y) =$ konst. aufzeichnet und die zugehörigen Richtungen etwa in einer »Windrose« anmerkt. Freilich wird man so nur eine beschränkte Zahl von Isoklinen verzeichnen können und beim Zeichnen zwischen zwei Isoklinen die Richtung festhalten. So erhält man ein Polygon, welches als genaue Lösung einer Differentialgleichung aufzufassen ist, deren Richtungsfeld zwischen zwei Isoklinen konstant ist und sich auf jeder Isokline sprunghaft ändert. Dementsprechend haben die Näherungspolygone Ecken. Dem kann man entweder durch freihändige geeignete krumme Führung des Linienzuges zwischen zwei Isoklinen abhelfen oder man kann versuchen, die freihändig etwas unbequeme Richtungsinterpolation durch ein rationelles Verfahren zu ersetzen. Als besonders geeignet empfiehlt Runge zu diesem Zweck das Verfahren der Näherungsfolge. Sein Prinzip ist dieses: Es sei $y = y_0(x)$ das Näherungspolygon. Dann bestimme man eine weitere Näherungskurve, die durch (x_0, y_0) geht, aus

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, y_0(x)).$$

Man setze also

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))\, dx.$$

Man kann dies Integral entweder rechnerisch bestimmen, nach irgend einem Verfahren der praktischen (mechanischen) Quadratur, oder man kann sich auch die Richtungskurve $y = f(x, y_0(x))$ erst auftragen, um diese dann graphisch zu integrieren. Bei deren Auftragen ist nun der Ort, wo man die Richtungsinterpolation durch eine bequemer zu handhabende Punktinterpolation ersetzt. Aus der so gefundenen Näherung y_1 bestimmt man analog eine zweite

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\, dx$$

usw. Dies Verfahren der Näherungsfolge konvergiert in der Regel außerordentlich rasch, namentlich wenn man sich noch einiger aus der angeführten Literatur ersichtlicher Vorsichtsmaßregeln bedient. Freilich sind nun unsere Literaturangaben noch durch den reichhaltigen Artikel von Runge und Willers im zweiten Bande der mathematischen Enzyklopädie zu vervollständigen.

Eine andere, für Zeichnung und Rechnung gleich brauchbare Methode hat Runge gefunden, als er sich die Aufgabe stellte, die Simpsonsche Regel auf die Integration von Differentialgleichungen zu übertragen. Dabei handelt es sich also um die Aufgabe, die Lösung $y(x)$ an der Stelle $x_0 + h$ durch eine lineare Verbindung von Funktionswerten

so zu approximieren, daß bei der Entwicklung des Näherungsausdruckes nach Potenzen von h möglichst viele Glieder mit der Entwicklung von $y(x_0 + h)$ übereinstimmen. **Kutta** hat in Vervollständigung der **Runge**schen Ueberlegungen dies Ergebnis gefunden: Uebereinstimmung bis zur vierten Potenz in h erhält man, wenn man ansetzt

$$y_n(x_0 + h) = y_0 + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Hier ist

$$K_1 = f(x_0, y_0)$$
$$K_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{K_1 h}{2}\right)$$
$$K_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{K_2 h}{2}\right)$$
$$K_4 = f(x_0 + h,\ y_0 + K_3 h).$$

Zur Beurteilung der hiernach erreichten Genauigkeit finden sich in der Literatur mancherlei Angaben, denen ich vom theoretischen Standpunkt mit einigem Mißtrauen begegne. Immerhin läßt sich durch genaueres Eingehen auf die **Runge-Kutta**schen Rechnungen die folgende Fehlerabschätzung gewinnen:

$$|y(x_0 + h) - y_n(x_0 + h)| < \frac{6MN|x - x_0|^5 |N^4 - 1|}{N - 1}.$$

Hierbei soll für die in Betracht kommenden x- und y-Werte sein:

$$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$$
$$|x - x_0| N < 1$$
$$aM < b$$
$$|f(x, y)| < M$$
$$\left|\frac{\partial^{(i+k)} f(x, y)}{\partial x^i \partial x^k}\right| < \frac{N}{M^{k-1}} \qquad (i + k \leq 4).$$

Ein durchgerechnetes Beispiel findet man z. B. bei **Sanden**.

Die besprochenen Verfahren lassen sich leicht auf Systeme von Differentialgleichungen ausdehnen. Damit beherrscht man dann natürlich auch die gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung, wo teilweise noch besondere Methoden zur Verfügung stehen, sowie die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Anfangswertproblem). Im **Runge**schen und im **Willers**schen Buche findet man auch das wenige für die Randwertaufgaben bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bisher Bekannte zusammengestellt. Ich gehe nicht näher darauf ein, da gerade in dieser Hinsicht, wie ich höre, neue Veröffentlichungen bevorstehen.

Es war der Zweck dieser Zeilen, für das Bekanntwerden der neuen praktischen Methoden zu wirken. Wenn es mir gelungen ist, neues Interesse zu wecken, so wird auch weitere Verwendung der Methoden und neuer Fortschritt im Ausbau der Methoden die Folge sein. Zu bedauern ist nur, daß ein Lehrbuch großen Stils im Gebiete der praktischen Mathematik noch nicht vorliegt. Ein solches würde freilich neben dem hier dargestellten Hauptinhalt der vorliegenden Leitfäden noch manches andere, z. B. manches aus der Praxis der Reihen usw. enthalten müssen. 16

KURZE AUSZÜGE

Hydraulik und Hydromechanik.

Energieverlust bei Querschnittserweiterung. Auf Veranlassung und unter Leitung von Prof. Prandtl hat Richard Kröner die Strömungsvorgänge in stark erweiterten Kanälen untersucht. (Versuche über Strömungen in stark erweiterten Kanälen. Dissertation, Berlin Techn. Hochsch., 1920, 85 S.; auch Heft 222 der Forschungsarbeiten a. d. Gebiet des Ingenieurwesens, herausg. vom V. d. I.) Die Querschnitte waren Rechtecke von gleichbleibender Höhe (254 mm), deren Breite von rd. 68 mm auf rd. 251 mm bei verschiedenen Erweiterungswinkeln zunahm. Die praktisch wichtigsten Ergebnisse, die der Abb. 67 der Dissertation zu entnehmen sind, lassen sich im Anschluß an die in der Hydraulik übliche

Darstellungsweise wie folgt angeben: Setzt man[1]) den Verlust h_v an Strömungsenergie (hydraulischer Höhe) zwischen dem (engen) Anfangsquerschnitt und einem genügend entfernten Endquerschnitt (wo die Strömung wieder gleichförmig verläuft) ins Verhältnis zur kinetischen Energie $\frac{c^2}{2g}$ der engsten Stelle:

$$h_v = \eta_e \frac{c^2}{2g},$$

so liefern die Krönerschen Versuche

die Beiwerte	$\eta_e = 0{,}34$	0,31	0,24	0,09,
für halbe Divergenzwinkel . . .	$\alpha = 45^0$	$22^1/_2{}^0$	12^0	6^0.

Diese Zahlen gelten für etwa 0,5 m³/sec Durchflußmenge; sie werden — wie alle derartig definierten Widerstandszahlen — etwas kleiner, wenn die Durchflußmenge wächst. Von älteren Versuchen wäre hierzu in Vergleich zu stellen, daß Stanton für ein Kreisrohr bei $\alpha = 6^1/_2{}^0$ ungefähr $\eta_e = 0{,}17$ gefunden hat[2]). — Kröner hat auch den Fall plötzlicher Querschnittserweiterung ($\alpha = 90^0$) untersucht, bei dem die mittlere Geschwindigkeit im Verhältnis $c_2 : c_1 = 1 : 3{,}62$ abnahm; schreibt man hier[2]) wie üblich:

$$h_v = \eta_s \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g},$$

so folgt aus den Kröner'schen Versuchen $\eta_s = 1{,}22$, übereinstimmend mit der üblichen Annahme $\eta_s = 1{,}2$ bis $1{,}5$. — Im übrigen enthält die Krönersche Arbeit ausführliche Angaben über die Versuchs- und Meßeinrichtungen und über verschiedene Einzelheiten des Strömungsverlaufes.

Ueberfall über ein Wehr. Versuchsergebnisse über die Größe der Ueberfallzahl bei seitlicher Kontraktion teilt V. M. Heglý mit (Comptes rendus, Paris, Bd. 165, 1917, S. 105—107). Am Ende eines rechteckigen Kanals von $L = 2$ m Breite befand sich eine oben eingeschnittene Wand von der Höhe $w = 0{,}80$ bezw. 0,40 m, über die das Wasser überfiel; die Breite l des Einschnittes betrug bei den Versuchen 0,40 bis 1,80 m, die Ueberfallhöhe h lag zwischen 0,10 und 0,50 m. Die Ergebnisse faßt Hegly im Anschluß an die bekannte Bazinsche Formel in folgenden Gleichungen für die Ueberfallmenge Q zusammen:

$$m = \left[0{,}405 - 0{,}030\frac{L-l}{L} + \frac{0{,}0027}{h}\right] \left[1 + 0{,}55\left(\frac{l}{L}\right)^2\left(\frac{h}{h+w}\right)^2\right], \quad Q = m\, l\, h\sqrt{2gh}.$$

Mit $l = L$ geht der Ausdruck in den von Bazin über. Die tatsächlich gemessenen Werte für m waren folgende:

l	$h = 0{,}10$	0,20	0,30	0,40	0,50 m
	a) Wehrhöhe $w = 0{,}40$ m.				
$= L$	0,438	0,444	0,457	0,470	0,480
1,80 m	435	435	444	454	465
1,60 „	431	428	432	440	448
1,20 „	424	417	419	422	424
0,80 „	416	406	405	405	405
0,40 „	408	395	392	391	391
	b) Wehrhöhe $w = 0{,}80$ m.				
$= L$	0,435	0,431	0,435	0,440	0,446
1,80 m	432	424	426	430	435
1,60 „	428	418	419	422	425
1,20 „	422	410	409	409	410
0,80 „	415	403	401	400	400
0,40 „	408	394	391	391	390

Ungeklärte Erscheinung bei Schmiermittelreibung. Die hydrodynamische Theorie der Reibung zwischen geschmierten Flächen, die von O. Reynolds begründet, von A. Sommerfeld weiter ausgeführt wurde[1]), führt zu der Anschauung, daß die Natur des Schmiermittels nur mit der Größe seiner Zähigkeitszahl in die Gleichungen eintritt. Dagegen hat C. Biel (Zeitschr. Ver. d. Ing. 1920, S. 449 bis 452 und 483—485) durch Versuche im Mechanischen Laboratorium der Karlsruher Hochschule gefunden, daß mit Voltolöl gemischtes Mineralöl, auch wenn die Zähigkeit den gleichen Wert hat, andere Reibungsarbeit ergibt als reines Mineralöl. Die Kurven, die das Reibungsmoment als Funktion der Umlaufzahl darstellen und die bekanntlich bei einer bestimmten Umlaufzahl ein deutlich ausgeprägtes Minimum aufweisen, werden durch Voltol-Zusatz etwas nach rechts unten verschoben, so daß der für die Praxis wichtige aufsteigende Ast bei dem Mischöl günstiger liegt. Eine annehmbare Erklärung für diese Erscheinung liegt noch nicht vor.

Flüssigkeitsoberfläche unter Einfluß der Schwere. Die Probleme der freien Oberfläche werden bekanntlich in der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie nur unter Vernachlässigung der unmittelbaren Schwerewirkung gelöst, d. h. man nimmt an, daß längs der freien Stromlinien bei konstantem Druck auch konstante Geschwindigkeit herrscht. Zwei Ansätze, die gestatten, Lösungen der (zweidimensionalen) hydrodynamischen Gleichungen für freie Oberflächen unter Schwerewirkung anzugeben, bringt A. R. Richardson (Philos. magaz. 40, 1920, S. 97—110). Seien x, y die Koordinaten eines Punktes, $P(x, y)$, $Q(x, y)$ Potential und Stromfunktion und, wie üblich,

$$z = x + yi, \qquad W = P + Qi$$

ihre vektoriellen (komplexen) Zusammenfassungen, so daß zwischen z und W zufolge der hydrodynamischen Gleichungen analytischer Zusammenhang bestehen muß. Man wähle nun — dies ist der erste Ansatz von Richard-

[1]) Vergl. z. B. R. v. Mises, Elemente d. techn. Hydromechanik I, Leipzig 1914, S. 167.

[2]) Vergl. ebenda S. 170f.

[1]) Vergl. z. B. das Referat in Encyklop. der mathem. Wissensch. Bd. IV, Art. 10, S. 296 ff.

son — eine Funktion $G(W)$ derart, daß sie längs irgend welcher Stromlinienstücke S_1, $S_2, \ldots$ (für die Q die Werte $Q_1, Q_2 \ldots$ annehmen mag) reell ist und eine Ableitung G' vom Absolutwert kleiner als 1 besitzt. Dann liefert die Integration von

$$(1) \qquad \frac{dW}{dz} = -\frac{\sqrt[3]{3\,g\,G(W)}}{\sqrt{1-G'^2(W)} + i\,G'(W)}$$

ein $W(z)$, für das längs $S_1, S_2 \ldots\ldots$ zwischen Geschwindigkeit v, Ordinate y und Schwerebeschleunigung g die Beziehung

$$(2) \qquad \frac{v^2}{2g} + y = \text{konst.}$$

besteht. Denn v ist bekanntlich gleich dem Betrag von $dW:dz$, also $\sqrt[3]{3gG}$, und da dW auf jeder Stromlinie rein reell gleich dP wird, hat man als imaginären Teil von (1)

$$\frac{dy}{dP} = -\frac{dG}{dP}\,\frac{1}{\sqrt[3]{3\,g\,G}}, \qquad y = \text{konst} - \frac{1}{2g}\sqrt[3]{(3\,g\,G)^2}.$$

Nach diesem Verfahren rechnet der Verfasser verschiedene Fälle, also Annahmen für $G(W)$, durch, z. B.

$$(3) \qquad G = C - \operatorname{tang\,hyp} \alpha W, \quad \text{mit } C = 2, \quad \alpha = 0{,}5.$$

Dieser Verfügung über G entspricht eine freie Stromlinie $Q = 0$ über einem steil abfallenden Strombett $Q = \frac{\pi}{2}$, deren Verlauf nach der Originalabbildung hier wiedergegeben ist;

die Zahlen längs des Bettes geben die berechneten Geschwindigkeiten in Bruchteilen der Anfangsgeschwindigkeit. Als besonders bemerkenswert bezeichnet der Verfasser die rasch wieder eintretende Gleichförmigkeit der Strömung im Unterlauf. — Da bei einer derartigen Bewegung, im Gegensatz zu den eigentlichen Strahlproblemen, die sonst nach der Helmholtzschen Theorie behandelt zu werden pflegen, die Reibung von ausschlaggebender Bedeutung, wenigstens für den Energieverlauf, wird, wäre es sehr wünschenswert, durch Beobachtung nachzuprüfen, wie weit die Schlußfolgerungen aus der Idealtheorie hinsichtlich der Geschwindigkeitsverteilung noch in Geltung bleiben.

Weniger Erfolg scheint dem Verfasser bei Anwendung seines Ansatzes auf das Problem des Überfalls zuteil zu werden. Er überlegt hier etwa so: Wenn man auf der rechten Seite von (1) für den Zähler 1 schreibt, so entspricht dies einer schwerelosen Bewegung mit einer Oberflächengeschwindigkeit vom Betrage 1 und $y = \text{konst} + G(W)$ längs der Oberfläche. Hat man hier $Q = 0$ auf der unteren, $Q = Q_0$ auf der oberen Begrenzung des Überfallstrahles, so ist die Differenz der y-Werte (daher auch die der G-Werte) zwischen Wehroberkante und dem Punkt gleichen Potentials auf der oberen Strahlbegrenzung nach Behauptung des Verfassers

$$(4) \qquad \frac{\pi + 2}{\pi}\,Q_0.$$

Bei der wirklichen Bewegung ist die Differenz der G-Werte zufolge der Definition von G (nämlich des Zusammenhanges zwischen v und G, sowie der Gleichung (2)):

$$(5) \qquad \frac{2}{3}\sqrt{2g}\left[\left(\frac{v_0^2}{2g} + H - y_0\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{v_0^2}{2g} + H\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

wo H die Höhe des Oberwasserspiegels über Wehrkrone bedeutet, v_0 die Zuflußgeschwindigkeit, y_0 die Höhe des betrachteten Punktes, der auf der oberen Stromlinie und der Niveaulinie durch den Anfangspunkt der unteren Strahlbegrenzung liegt. Setzt man nun, was näherungsweise gelten soll, (5) gleich (4) (mit umgekehrtem Vorzeichen?), so erhält man für die Überfallsmenge

$$(6) \qquad Q_0 = \frac{\pi + 2}{\pi}\,\frac{2}{3}\sqrt{2g}\left[\left(\frac{v_0^2}{2g} + H\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{v_0^2}{2g} + H - y_0\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Hierin erblickt der Verfasser einen angenähert richtigen Ausdruck für die tatsächlichen Beobachtungen.

In einem zweiten Teil der Mitteilung wird ein ähnliches, etwas umständlicheres Verfahren dargelegt, das auch noch die Berücksichtigung eines willkürlich vorgeschriebenen Druckverlaufes $p(W)$ längs der freien Oberfläche $S_1, S_2 \ldots$ gestattet. Wird jetzt nämlich $F(W)$ so gewählt, daß längs $S_1, S_2 \ldots\ldots$ die Ableitung $F'(W)$ reell und der Ausdruck unter der nachstehenden Wurzel positiv ist, so folgt aus Integration von

$$(7) \qquad \frac{dz}{dW} = \sqrt{\frac{1}{c^2 + 2gh - 2gF - p} - F'^2} + iF'$$

eine Strömung, für die längs $S_1, S_2 \ldots\ldots$ der Druck gleich p und $y = y_0 + F(W)$ ist. Auch dieses Verfahren erörtert der Verfasser an mehreren Beispielen, z. B. für stehende Wellen mit

$$F(W) = \frac{c^2}{g}\,(1 - a^2 \operatorname{tang\,hyp}^2 \mu a W), \quad a = 1 - g\,\frac{h}{c^2}.$$

Die Gestalt dieser Wellen ist sehr ähnlich der von Lord Reyleigh unter Vernachlässigung der Schwere untersuchten flachen „Einzelwelle"[1]).

Geometrie der Stromlinien. Die einfachen, aus den Eulerschen Gleichungen unmittelbar folgenden Eigenschaften der Strom-

[1]) Lamb, Hydrodynamik, Leipzig 1907, S. 488.

linien einer stationären Flüssigkeitsbewegung, die unter Einfluß von Potentialkräften bei Abwesenheit von Reibung vor sich geht, hat L. Lecornu (Comptes rendus, Paris, Bd. 171, 1920, S. 881—885) zusammengestellt. Bezeichnet ϱ den Krümmungshalbmesser einer Stromlinie, f den (unendlich klein zu denkenden) Querschnitt eines Stromfadens, ds das Wegdifferential in Richtung der Stromlinie, so ist neben ϱ die Größe

$$\vartheta = \frac{1}{f} \frac{df}{ds}$$

für den Verlauf der Stromlinien kennzeichnend. Die Resultierende eines Vektors von der Länge ϱ in Richtung der Hauptnormalen und eines von der Länge ϑ in Richtung der Tangente fällt mit dem Beschleunigungsvektor der Richtung nach zusammen. Zu den so (als Resultante von ϱ und ϑ) definierten Vektoren muß es also Orthogonalflächen $S =$ konst. geben. Jede S-Fläche enthält die Binormalen der Stromlinien als Tangenten. Setzt man

$$\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \vartheta^2} = E,$$

und nennt dn den Abstand zweier benachbarter S-Flächen, so variiert das Geschwindigkeitsquadrat v^2 auf jeder Fläche proportional Edn. Soll die Bewegung wirbelfrei sein, so ist notwendig und hinreichend, daß Edn längs jeder S-Fläche konstant bleibt und die Rotorkomponente in Richtung der Geschwindigkeit verschwindet.

Ueber die Entstehung von Wirbeln. Seit etwas von der Helmholtzschen Wirbeltheorie in weitere Kreise gedrungen ist, haben sich nicht wenige irrtümliche, oder wenigstens ungenaue, Ansichten darüber festgesetzt. Immer wieder findet man beispielsweise die Auffassung, eine „Wirbelbewegung" müsse dem Beobachter ohne weiteres so erscheinen, wie etwa das, was man im gewöhnlichen Sprachgebrauch als „Wirbel" bezeichnet. Bekanntlich ist aber nach der Helmholtzschen Definition eine Bewegung in geraden Parallelbahnen, wenn nur die Geschwindigkeiten aller Teilchen nicht dieselben sind, eine Wirbelbewegung; dagegen können sich alle Teilchen einer Flüssigkeit „wirbelfrei" auf konzentrischen Kreisen bewegen. — Ein wichtiges Ergebnis der Helmholtzschen Theorie ist der Satz, daß in einer reibungsfreien Flüssigkeit, wenn die äußeren Kräfte ein Potential besitzen, Wirbel nicht entstehen können. Da man nun tatsächlich das Entstehen von Wirbeln in Flüssigkeiten beobachtet, so hält man es für selbstverständlich, daß dies nur dem Vorhandensein von Reibung zugeschrieben werden könne. Doch hat schon F. Klein im Jahre 1910 darauf aufmerksam gemacht, daß beispielsweise beim Herausziehen eines Ruders aus dem Wasser auch ohne die Annahme von Reibung das Entstehen von Wirbeln sich erklären läßt. Nun zeigt G. Jaffé (Phys. Zeitschrift 21, 1920, S. 541—543), daß ein ganz ähnlicher Satz über Wirbelbildung wie für ideale auch für reibende Flüssigkeiten gilt, nämlich: Wenn die äußeren Kräfte in der ganzen Flüssigkeit einschließlich ihrer Begrenzung ein Potential besitzen, so bleibt eine anfänglich wirbelfreie Bewegung auch trotz innerer Reibung wirbelfrei. Man erkennt daraus, was für viele Probleme, namentlich der Aerodynamik, von Wichtigkeit ist, daß das beobachtete Entstehen von Wirbeln im wesentlichen immer auf die Grenzbedingungen, also auf das Verhalten der festen Körper, zurückzuführen ist. Eine nähere Untersuchung dieser Verhältnisse wäre wohl lohnend und aussichtsreich.

Oberflächenwellen in geraden Kanälen. Die Gestalt der Oberfläche in geraden Kanälen ist bekanntlich sowohl für den Fall sehr geringer wie sehr großer Tiefe untersucht worden. Cisotti stellt sich die Aufgabe (Atti d. R. Accad. dei lincei, Bd. 27, 1918, S. 255 und 312) für die kleinen Bewegungen an der Oberfläche von Kanälen mittlerer Tiefe die charakteristische Gleichung abzuleiten, die bei Kanälen geringer Tiefe in die bekannte Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = o$$

übergeht. Er findet unter Verwendung des H. A. Schwarzschen Spiegelungsprinzips, daß das koplexe Potential f, das außer von der Zeit von der komplexen Variablen $z = x + iy$ abhängt, wenn h die Tiefe des Kanals bezeichnet, g die Erdbeschleunigung, folgender Beziehung genügt.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[f(z+ih) + f(z-ih)] + ig\frac{\partial}{\partial z}[f(z+ih) - f(z-ih)] = o.$$

Aus dieser Gleichung, die für verschwindend kleines h in die oben angeführte übergeht, lassen sich Schlüsse auf Bewegungen vom Typus stehender Wellen ableiten. In einer weiteren Abhandlung (ebenda Bd. 28, 1919, S. 196) wird die Untersuchung ausgedehnt auf den Fall beliebiger, also nicht nur kleiner, Abweichungen der Oberflächen von dem Ruhezustand. Insbesondere gilt hier für stationären Bewegungszustand, wenn f', die Ableitung von f nach z, als Funktion von f aufgefaßt wird und q die sekundliche Durchflußmenge bezeichnet:

$$\frac{d}{d f}[f'(f+iq)\cdot f'(f-iq)] - ig\left[\frac{1}{f'(f+iq)} - \frac{1}{f'(f-iq)}\right] = o.$$

Anwendung der Ritzschen Methode. Die Geschwindigkeitsverteilung v der laminaren Strömung in einem geraden Kanal von konstantem Querschnitt folgt, wie bekannt, der Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{Jg}{Z}$$

(x, y Koordination im Querschnitt, J Gefälle, g Schwerebeschleunigung, Z Zähigkeitszahl in cm^2/sec). Ist der Querschnitt ein Quadrat von der Seitenlänge a, so läßt sich die Gleichung durch eine bekannte Reihenentwick-

lung lösen. M. Paschoud (Comptes rendus, Paris, Bd. 159, 1914, S. 158—160) hält es für vorteilhafter, die Ritzsche Methode zur Lösung anzuwenden. Es kann nämlich v auch aus der Bedingung bestimmt werden, daß das über die Quadratfläche erstreckte Integral

$$J = \int \left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 - \frac{2Jg}{Z} v \right] df$$

ein Minimum wird. Setzt man für v die endliche Doppelsumme

$$\sum_1^m \sum_1^n A_{\mu\nu} \cos \frac{\mu \pi x}{2a} \cos \frac{\nu \pi x}{2a},$$

so können die mn Koeffizienten A aus der Forderung ermittelt werden, daß die Ableitungen von J nach jedem einzelnen von ihnen verschwinden. Die mittlere Geschwindigkeit c erhält die Form

$$c = \frac{32 J g a^2}{\mu^6 Z} \cdot k, \qquad k = \sum^{\infty} \sum^{\infty} \frac{2}{\mu^2 \nu^2 (\mu^2 + \nu^2)}.$$

Aus den ersten fünf Gliedern dieser Doppelsumme findet der Verfasser $k = 0,0350$, mit 46 Gliedern den Wert $k = 03514 \ldots$, der auf 5 Stellen genau sein soll. — J. Boussinesq bemerkt dazu (ebda. S. 160), daß hier die Ritzsche Methode einfach darauf hinausläuft, die Konstante auf der rechten Seite der Ausgangsgleichung durch ihre trigonometrische Entwickluug über die Quadratfläche zu ersetzen.

Gestalt und Auflösung eines fallenden Flüssigkeitsstrahles. R. Scheuermann (Ann. d. Phys. Bd. 60, 1919, S. 232—259) untersucht den Einfluß der Kapillarität auf die Verengung, die der Querschnitt eines vertikal fallenden Wasserstrahles erfährt. Bekanntlich hat Weißbach für den Zusammenhang zwischen der Falltiefe y und dem Halbmesser x des Strahl-Querschnittes durch überschlägige Berechnung des Schwere-Einflusses gefunden:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} \left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^4 - 1 \right].$$

Hierin bedeutet v_0 die Ausflußgeschwindigkeit, x_0 den Radius der Ausflußöffnung. Nach den experimentellen Untersuchungen von Scheuermann ist auf der rechten Seite der Gleichung noch hinzuzufügen:

$$+ \frac{2\alpha}{\sigma x_0 g} \left(\frac{x_0}{x} - 1 \right),$$

worin bedeutet α die Kapillaritäts-Konstante, σ die Dichte der Flüssigkeit, g die Schwerebeschleunigung. Sorgfältige Ausmessungen an Photographien fallender Strahlen, wobei $v_0 =$ 6 bis 8 cm/sec, $x_0 = 0,5$ bis 0,8 cm, ergaben $\alpha =$ 73,89 dyn/cm in guter Übereinstimmung mit anderen Beobachtungen über Kapillarität.

Einfluß der Kanalwände auf den Bewegungswiderstand einer Kugel. Die für zahlreiche praktische Aufgaben der Hydraulik und der Aerodynamik wichtige Untersuchung des Bewegungswiderstandes einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit findet eine wertvolle Ergänzung durch die Arbeit von Arne Westgren (Ann. d. Phys. Bd. 52, 1917, S. 308 bis 322). Er ließ kleine Kügelchen aus Mastix und Gummigutt von $a = 5-6\ \mu$ Halbmesser zwischen Wänden herabfallen, deren Entfernung $2l$ zwischen 20 und 200 μ lag. Die Fallstrecke betrug 9,2336 mm, die Fallzeit 10 bis 60 sec. Es ergab sich, daß der Reibungswiderstand F im Verhältnis zu seinem Wert F_∞ bei sehr großer Weite des Kanals folgender Beziehung genügt:

$$F = F_\infty \left[1 + k \frac{a^2}{l^2} \right],$$

wobei $k = 3,4$ mit einer Sicherheit von 10 % festgestellt werden konnte. — Es muß freilich dahingestellt bleiben, wie weit diese Ergebnisse für molekulare Abmessungen auf Kugeln von praktisch endlichen Dimensionen übertragen werden dürfen.

Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes. Von einer physiologischen Fragestellung ausgehend (Energieaufwand für die Blutzirkulation) hat J. Schleier experimentell untersucht, wie weit das Poiseuillesche Gesetz in einem kompliziert verzweigten System dünner Röhrchen noch gilt. Er fand bei Durchmessern zwischen 0,3 und 0,5 mm den beobachteten Energieaufwand um nur 7 % größer als den berechneten, was durch die unvermeidlichen Widerstände an den Übergangsstellen leicht zu erklären ist. Bei der Versuchsanordnung waren etwa 20 Abzweigungsstellen vorhanden (Phys. Zeitschrift 21, 1920, S. 14—15).

Kritische Geschwindigkeit. Um den Koeffizienten der inneren Reibung von Flüssigkeiten zu bestimmen, haben G. Zemplén und B. Pogány (Ann. d. Phys. Bd. 49, 1916, S. 39 bis 70) um eine fest aufgehängte Vollkugel eine wenig größere Hohlkugel rotieren lassen, während sich in dem engen Zwischenraum die zu untersuchende Flüssigkeit befand. Die Ergebnisse hinsichtlich der Reibungszahlen stimmen mit den früher bekannten überein. Auffallend aber war, daß sich keine kritische Geschwindigkeit ergab, trotzdem die Größenverhältnisse eine solche erwarten ließen. Die Kugelhalbmesser waren 5,5645 cm außen, 4,1757 cm innen, die Rotationsgeschwindigkeit wurde bis etwa 37 pro sec gesteigert, so daß bei einer Zähigkeitszahl von etwa 0,01 die Reynoldsche Zahl (Geschwindigkeit mal Spaltbreite durch Zähigkeit) ungefähr 5000 betrug, gegenüber dem kritischen Wert von 2000 im analogen Fall zweier Zylinder.

Zerreißen einer Flüssigkeitsschicht. Rollt eine Kugel auf einer ebenen Platte, während sich eine dünne Flüssigkeitsschicht zwischen beiden befindet, so kann man beobachten, daß bei einer gewissen Geschwindigkeit des Rollens die Flüssigkeitsschicht zerreißt. Max Toepler hat diese Erscheinung nach optischen Methoden sorgfältig untersucht (Ann. d. Phys. Bd. 55, 1918, S. 337—370), indem er eine Glaslinse von 11—95 cm Krümmungsradius auf einer ebenen Glasplatte pendeln ließ. Bestand die Flüssigkeitsschicht aus destilliertem Wasser, so zerriß sie bei rund 1,1 cm/sec, bei anderem Material ergaben sich wenig davon verschiedene Werte, z. B. für Äthyl-Äther 2,15 cm/sec.

Geschwindigkeitsmessung auf Schiffen. Yves Delage beschreibt die Konstruktion eines Instrumentes, das zur Messung der Schiffsgeschwindigkeit und Aufzeichnung des durchlaufenen Weges dienen soll (Comptes rendus, Paris, Bd. 171, 1920, S. 646—651). Es besteht im wesentlichen aus einer Pitotschen Röhre, deren Anzeige elektrisch nach dem Schiffsinnern übertragen wird. Um die Unabhängigkeit der Anzeige von der Ladung bezw. dem Tiefgang des Schiffes zu erzielen, ist der Apparat schwimmend angeordnet. Eine komplizierte Einrichtung dient dazu, die Aufzeichnung auf einer Meßtrommel der Geschwindigkeit selbst, statt ihrem Quadrat, proportional werden zu lassen. Zu diesem Zwecke werden die Niveauschwingungen der Pitotschen Röhre erst auf einen Schwimmer von parabolischem Längsschnitt übertragen. Mesnager (ebda. S. 689—691) bemerkt dazu, daß die Frage der Übertragung und der Unabhängigkeit vom Tiefgang des Schiffes schon früher in einfacherer Weise gelöst worden sei.

Messung der Zähigkeit. Um den Koeffizienten der inneren Reibung in Flüssigkeiten zu bestimmen, sind in der letzten Zeit mannigfache Verfahren angegeben worden. Nach einem Referat in den „Physikalischen Berichten" Bd. 1, 1920, S. 1469 beschreiben W. H. Gibson und L. M. Jocobs (Journ. chem. soc. 117/118, 1920, S. 473—478) die folgende auf den Stokesschen Gesetzen für die Bewegung kleiner Kugeln beruhende Meßanordnung. In einem Glasrohr von 2 cm Durchmesser und etwa 29 cm Länge wird das Fallen eines Kügelchens von 0,15 cm Durchmesser beobachtet. Längs des Rohres sind 4 Teilstrecken zu je 5 cm gekennzeichnet; innerhalb der ersten erwirbt die fallende Kugel hinreichend genau ihre Endgeschwindigkeit, die Zeiten, in denen sie die drei übrigen durchläuft, geben ein Maß für diese Geschwindigkeit. Es genügt, die Fallzeit selbst zu messen, die bei gegebenem Kugelgewicht der Zähigkeitszahl direkt proportional ist. Die mit diesem Verfahren erzielten Ergebnisse stimmten sehr gut mit anderweitigen Bestimmungen der Zähigkeitszahl des Ricinusöls überein. — Andere, mehr technische Methoden zur Messung der Zähigkeit sind die von L. Gümbel (Zeitschr. f. techn. Physik, Bd. 1, 1920, S. 72—75) beschriebene, bei der der Ausfluß einer Flüssigkeit aus einem kreisringförmigen Spalt, und die von O. Faust angegebene, bei der das Aufsteigen einer Luftblase in einer mit der Flüssigkeit gefüllten Glasröhre beobachtet wird (Zeitschr. f. physikal. Chemie, Bd. 93, 1919, S. 758—761). 18

Mises.

BUCHBESPRECHUNGEN

GEORG **DUFFING,** Ingenieur: Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Sammlung Vieweg. Heft 41/42. Braunschweig 1918. VI + 134 S.

Bekannt ist von der Theorie der erzwungenen harmonischen Schwingung, d. h. von der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x = k \sin \omega t, \quad \alpha > 0 \quad . \quad . \quad \text{I}$$

allgemein, daß sie für $\alpha \neq \omega^2$ eine periodische Lösung

$$\frac{k}{\alpha - \omega^2} \sin \omega t$$

hat, die für $\alpha > \omega^2$ die gleiche, für $\alpha < \omega^2$ entgegengesetzte Phase wie die erregende Schwingung $k \sin \omega t$ besitzt. Für $\alpha = \omega^2$ liegt Resonanz vor. Die Gleichungen, welche zahlreiche Schwingungsprobleme der Technik bieten, sind komplizierter, Gleichung I gilt angenähert nur für kleine Schwingungen. Schon das einfache Pendel führt auf die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \sin x = k \sin \omega t \quad . \quad . \quad \text{II},$$

die für $k = 0$ durch elliptische Funktionen integriert werden kann, für $k \neq 0$ der Behandlung erhebliche Schwierigkeiten zu bieten scheint. Herr Duffing beschäftigt sich mit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 = k \sin \omega t \quad \text{III},$$

$$(\alpha > 0, \ \gamma < 0)$$

die für $\beta = 0$, $\gamma = -{}^1/_6\, \alpha$ Gleichung II besser annähert als I. Die Zusatzglieder sind nun von wesentlichem Einfluß. Der Begriff der Resonanz wird hinfällig: die homogen gemachte Gleichung II (oder III) besitzt je nach Amplitude Frequenzen, die von $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\alpha}$ bis gegen null abnehmen. Unter der Annahme, daß eine periodische Lösung von III für $k = 0$ existiert, berechnet der Verfasser nach drei Methoden (Variation der Konstanten, Methode der sukzessiven Annäherung und Ritzsches Verfahren) die Grundschwingung

$$x = A \sin \omega t$$

und findet für A (bei $\beta = 0$) eine Gleichung dritten Grades, die für $\omega^2 \geq \alpha$ nur eine Lösung, für $\omega^2 < \alpha$ und hinreichend kleines (!) k aber drei Lösungen besitzt, von denen eine stetig in die Lösung von I übergeht. Aber gerade diese vereinigt sich für ein kritisches k mit der dritten und wird für noch größere k komplex, während die dann noch übrig bleibende eine reelle Lösung die entgegengesetzte Phase wie die Lösung von I ergibt. Bei kleinem k liegen also die Lösungen von III in der Nähe der Lösungen von I, doch gibt es für $\omega^2 < \alpha$ und hinreichend kleines k noch zwei andere

Lösungen; für größeres k gibt es nur eine Lösung, die jedoch auch für $\omega^2 < a$ die entgegengesetzte Phase wie die erregende Schwingung hat. Experimente zeigen qualitativ richtig das entsprechende Ueberspringen aus einer Bewegungsform in die andere und stimmen auch quantitativ bis auf etwa 10 vH. Die dritte Schwingungsmöglichkeit realisiert sich nicht, scheint also instabil zu sein: der Verfasser beweist die Instabilität für den Fall, daß die dritte mit der zweiten zusammenfällt, also für das kritische k. Die Anwendung auf die Praxis, der Fall $\beta \neq 0$, Dämpfung u. a. wird noch kurz besprochen, der Anhang bringt eine Zusammenstellung von Formeln der Weierstraßschen Theorie der elliptischen Funktionen, deren Kenntnis aber nur zum Verständnis der ersten Methode bis zu einem gewissen Grade erforderlich ist.

Merkwürdige Schwingungserscheinungen in verhältnismäßig einfachen Fällen werden durch die Untersuchung aufgeklärt, dem Ingenieur zum Dank und dem Mathematiker zur Anregung, tiefer zu forschen. Hamel.

Berlin, den 5. Oktober 1920. 1

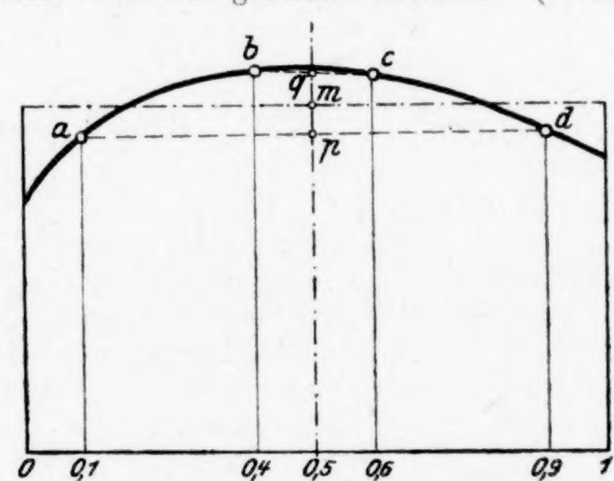
EMILE **COTTON.** Cours de mécanique générale, introduction à l'étude de la mécanique industrielle (Bibliothèque de l'élève ingénieur). Grenoble bei Jules Rey, Paris bei Gauthier-Villars et Co. 1920. 138 S.

Nachdem schon in einem ersten Teile Vektoren, Massengeometrie, allgemeine Grundsätze, Kinematik und Statik behandelt sind, werden in diesem zweiten Teil die Hauptsätze der Dynamik der Punkte und der starren Körper dargestellt. Das nur 138 Seiten starke Buch (Preis 8 frcs + Teuerungszuschlag) gliedert sich in fünf Kapitel, welche die folgenden Gegenstände enthalten: Einheiten und Arbeit, Dynamik des Punktes, Allgemeine Theoreme der Dynamik der Systeme, Prinzip der lebendigen Kraft, Relativbewegung. Das Buch wendet sich an Anfänger, steigt aber immerhin bis zu den Eulerschen Gleichungen auf. Wissenschaftlich scheint es nichts Neues zu enthalten, die Darstellung ist klar. Vergleicht man mit deutschen technischen Mechanikbüchern, so fällt vor allem die starke Zusammendrängung auf. Viel Arbeit bleibt dem Leser überlassen, z. B. wird die ganze Theorie des Schubkurbelgetriebes ganz wenigen Aufgaben überwiesen. Es fehlt jedoch keineswegs an praktischen Anwendungen und wer mit dem Bleistift in der Hand liest, wird recht gut Mechanik aus dem kleinen Buch lernen können. 10

Berlin, den 12. Dezember 1920. Hamel.

KLEINE MITTEILUNGEN

Einfache Quadraturformel. Eine sehr einfache, sowohl zeichnerisch als rechnerisch leicht verwendbare Quadraturformel ist kürzlich in der „Nature" (Bd. 105, 1920, S. 354) von A. F. Dufton angegeben worden. Ihr zeichnerischer Ausdruck ist folgender: Man halbiert das Integrations-Intervall (s. Abb.),



trägt von den äußeren Enden nach innen und von der Mitte nach beiden Seiten je ein Zehntel der Intervall-Länge ab, so daß man auf der zu integrierenden Kurve die Punkte a, b, c und d erhält. Die Sehnen ad und bc schneiden die Mittelsenkrechte in p und q; der Halbierungspunkt m von pq gibt den Näherungswert für die gesuchte mittlere Höhe. Rechnerisch bedeutet das, wenn wir für den Anfang des Intervalls $x = 0$, für das Ende $x = 1$ setzen und die gegebene Funktion mit $f(x)$ bezeichnen, daß für das Integral

$$J = \int_0^1 f(x)\, dx$$

der Näherungsausdruck

$$J' = {}^1/_4\,[f(0{,}1) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}9)]$$

gesetzt wird. Die Begründung, die Dufton gibt, sieht etwa so aus: Wenn man annimmt, daß $f(x)$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots,$$

so läßt sich sowohl J als J' als linearer Ausdruck in den $a_0, a_1 \ldots\ldots$ darstellen, und zwar erhält man nach einfacher Rechnung:

$$J = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots = a_0 + 0{,}5\, a_1 + 0{,}3333\, a_2 + 0{,}25\, a_3 + 0{,}2\, a_4 + 0{,}16667\, a_5 + 0{,}142857\, a_6 + 0{,}125\, a_7 + 0{,}1111\, a_8 + 0{,}1\, a_9 + 0{,}090909\, a_{10} + 0{,}08333\, a_{11} + \ldots\ldots$$

und demgegenüber

$$J' = a_0 + \frac{a_1}{2} + a_2 \frac{0{,}1^2 + 0{,}4^2 + 0{,}6^2 + 0{,}9^2}{4} + \ldots = a_0 + 0{,}5\, a_1 + 0{,}335\, a_2 + 0{,}2525\, a_3 + 0{,}20285\, a_4 + 0{,}169625\, a_5 + 0{,}14555\, a_6 + 0{,}12698\, a_7 + 0{,}11198\, a_8 + 0{,}09944\, a_9 + 0{,}08871\, a_{10} + 0{,}07937\, a_{11} + \ldots\ldots$$

Aus dem Vergleich der Zahlenfaktoren erkennt man, daß der Unterschied zwischen J und J' in der Regel nur einen geringen Bruchteil des Wertes von J ausmachen wird. Der größte Unterschied zweier Zahlenfaktoren innerhalb der ersten elf Glieder (unter denen die beiden ersten genau übereinstimmen) ist 0,00296 bei a_5.

Aus dieser Betrachtung läßt sich aber kein Urteil über die Genauigkeitsgrenze der Formel $J = J'$ gewinnen. Einen Anhaltspunkt liefert der Vergleich mit der Gaußschen Quadratur-

formel für $n=4$. Danach muß man, wenn 4 Funktionswerte benutzt werden sollen, um eine möglichst gute Annäherung — in dem durch den Gaußschen Gedankengang festgelegten Sinn — zu erhalten, die Abszissen $x=0{,}07$ und $x=0{,}33$ (statt 0,1 und 0,4) und die symmetrisch dazu liegenden wählen, dann den ersten Funktionswert mit 0,174, den zweiten mit 0,326 (statt beide mit 0,25) in Rechnung bringen. Es stellt sich also die Annahme $J=J'$ gewissermaßen als eine Gaußsche Formel mit stark abgerundeten Zahlen dar.

Eine tatsächliche Fehlerabschätzung gewinnt man, wenn man den bekannten Grundgedanken der Interpolationsmethode unter Benutzung der Punkte a, b, c, d anwendet. Die Zahlenwerte, mit denen $f(0{,}1)$ bezw. $f(0{,}4)$ in Rechnung zu stellen sind, ergeben sich dann zu 0,2444.... bezw. 0,2555.... (oder $^{22}/_{90}$ und $^{23}/_{90}$). Der Fehlerbetrag liegt, wenn die Intervall-Länge zur Einheit gewählt ist, unter

$$0{,}0041 \frac{f''''_{max}}{4!},$$

wo f''''_{max} den größten absoluten Betrag der vierten Abteilung von f innerhalb des Bereiches bezeichnet. Demnach ist

$$|J-J'| \leq {}^1/_{180}\, |f(0{,}1)+f(0{,}9)-f(0{,}4)-f(0{,}6)| + 0{,}00017\, f''''_{max}.$$

Der Klammerausdruck rechts ist das Doppelte der Entfernung pq in der Abbildung, sein 180ster Bruchteil kann wohl im allgemeinen der mittleren Höhe gegenüber vernachlässigt werden. Nicht so einfach ist der zweite Teil rechts zu beurteilen, da man über den Betrag der vierten Ableitung in der Regel kaum etwas wird aussagen können.

Hier liegt ein gemeinschaftlicher Mangel aller feineren Quadraturformeln, wenigstens bei dem bisherigen Stand der Theorie, vor. Überall kann man die Genauigkeitsgrenzen nur in Abhängigkeit von den höheren Ableitungen darstellen. Ist aber $f(x)$ empirisch gegeben, so sind die Ableitungen, schon von der dritten an, nicht mehr als definiert anzusehen und bei analytischer Angabe von $f(x)$ wird es nur sehr selten möglich sein, die Werte höherer Differentialquotienten zahlenmäßig zu berechnen. Ohne Fehlerabschätzung hat aber die Wahl besonderer Formeln, etwa gegenüber der Simpsonschen Regel, keinen faßbaren Sinn.

Das allgemeine Problem, das hier zu lösen wäre, gehört der Variationsrechnung an. Man muß davon ausgehen, daß die gegebene Kurve zweimal stetig differenzierbar ist und der Betrag der zweiten Ableitung unter einer festen Grenze m liegt (die praktisch wohl immer noch leicht festzustellen sein wird). Gefragt wird nach den Größt- und Kleinstwerten des Integrals $J=\int_0^1 f\,dx$ bei gegebenem m und weiteren gegebenen „Randbedingungen", z. B. in unserem Fall, gegebenem Wert von $4J' = f(0{,}1)+f(0{,}4)+f(0{,}6)+f(0{,}9)$. Daß es derartige Extremwerte gibt, ist sicher — sie müßten allerdings nicht von den Stetigkeitsbedingungen genügenden Kurven angenommen werden — da man äußere Schranken für J angeben kann. Zwischen den zwei Punkten a, b kann sich nämlich $f(x)$ von der Geraden ab nicht weiter entfernen als um die Ordinate der Parabel $\frac{m}{2}(x^2-0{,}15^2)$, wobei der Anfangspunkt in der Mitte der Strecke gedacht ist. Das Polygon, das durch die Punkte a, b, c, d einschließlich der Verlängerungen von ab und cd, bestimmt wird, hat die Fläche

$${}^8/_{30}\,[f(0{,}1)+f(0{,}9)] + {}^7/_{30}\,[f(0{,}4)+f(0{,}6)]$$

und die Summe der einzelnen Parabelbögen gibt $0{,}0065\, m$ so daß

$$|J-J'| \leq {}^1/_{60}\,[f(0{,}4)+f(0{,}6)-f(0{,}1) - f(0{,}9)] + 0{,}0065\, m.$$

Damit hat man wohl eine richtige Einschränkung des Fehlers, aber keine hinreichend enge. Nichtberücksichtigt ist hier die Stetigkeit der Kurve an den Punkten a, b, c, d und demgemäß wird der Betrag 0,0065 m praktisch viel zu groß sein, um ein brauchbares Maß für die Genauigkeit des Ansatzes $J=J'$ zu liefern. 22

Mises.

Steuertarif und Ausgleichsrechnung. An dem neuen Reichseinkommensteuer-Tarif ist, abgesehen von der Höhe der Steuersätze, noch bemerkenswert, daß er im mathematischen Sinn ein leidlich gutes Ausgleichs-Ergebnis darstellt, was durchaus nicht von allen Tarifen behauptet werden kann. Trägt man nämlich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem den Steuerbetrag s als Funktion des steuerpflichtigen Einkommens x, beide in Einheiten von 1000 ℳ, auf, so ergibt sich im Bereich bis $x=260$ nebenstehendes Bild (Abb. 1) (s. S. 75), das das Aussehen einer glatten, stetig gekrümmten Kurve aufweist, obwohl es definitionsgemäß als Polygon gezeichnet wurde. Immerhin lassen sich durch einfache mathematische Überlegungen Fingerzeige für einige Verbesserungen der Abstufung gewinnen.

Wenn man sich die Aufgabe stellt, eine „progressive" Steuer zu konstruieren, bei der also der Steuersatz $s:x$ mit x ständig steigt, ohne einen bestimmten Grenzwert α zu überschreiten, so wird man wohl als einfachste Formel die h y p e r b o l i s c h e finden:

$$(1) \qquad \frac{s}{x} = \alpha\,\frac{x+C}{x+c}.$$

Hierin muß man in unserem Falle, den Absichten des Gesetzgebers entsprechend, $\alpha=0{,}60$ setzen und wenn man überdies die Steuersätze für $x=1$ und $x=10$ mit 10 vH bezw. 14,5 vH als gegeben ansieht, $\alpha C=8{,}5$, $c=90$, also

$$(2) \qquad \frac{s}{x} = \frac{0{,}6\,x+8{,}5}{x+90}.$$

Die nach dieser Formel berechneten Steuersätze stimmen ganz gut mit den vom Tarif vorgeschriebenen überein, wie die dritte und zweite Spalte der folgenden Tafel zeigt:

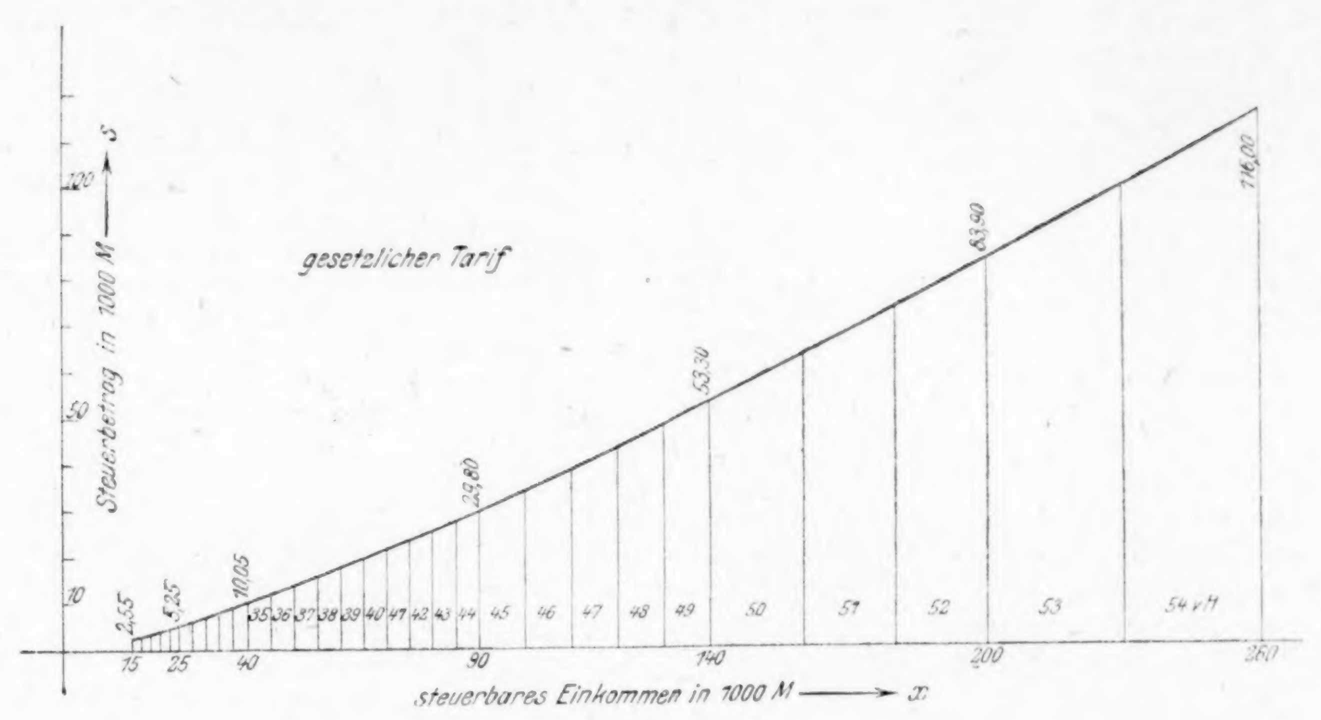


Abb. 1

Einkommen x in 1000 ℳ	Steuersatz $s:x$ nach vorgeschriebenem Tarif	Formel (2)	ausgeglichenem Tarif
15	0,170	0,167	0,170
25	0,210	0,204	0,208
40	0,251	0,250	0,252
90	0,331	0,347	0,348
140	0,381	0,402	0,402
200	0,420	0,443	0,444
500	0,506	0,523	0,523
1000	0,553	0,558	0,557

Man sieht, daß der Tarif die kleineren Einkommen der Formel gegenüber etwas ungünstiger stellt, die größeren (über 40000 ℳ) etwas begünstigt.

Jeder, der gewohnt ist, mit algebraischen Formeln umzugehen, wird die Berechnung des Steuerbetrages s nach (2) gewiß einfacher finden, als die nach dem Tarif, die eine mühsame Zerlegung des ganzen Einkommens x in einzelne „Einkommenstufen" erfordert. Der Tarif schreibt bekanntlich vor: Für die ersten 1000 ℳ Einkommen eine Abgabe von 10 vH, die nächsten 1000 ℳ 11 vH usw., für das 16. und 17. Tausend 25 vH usw., für das 26. bis 28. Tausend 30 vH usw. Die graphische Darstellung dieser Beziehung führt auf ein Polygon, dessen Eckpunkte die Abszissen 1, 2, 3 . . . . ., dann 16, 18, 20 . . . . ., dann 26, 29, 32 . . . . . usw. besitzen. Zudem braucht man, um die Rechnung nach der Formel durchführen zu können, sich nur die drei Zahlen 0,60, 8,5 und 90 zu merken, während das andere Verfahren die Verwendung einer Tabelle mit der Aufzählung der 50 verschiedenen Einkommenstufen zur Voraussetzung hat. Trotzdem ist es wohl begründet, daß als bindende Vorschrift der Steuerbemessung im Gesetz ein aus geraden Stücken bestehendes Polygon statt der stetig gekrümmten Kurve definiert wird. Denn dem Steuerbeamten wird zweifellos eine Tabelle zur Verfügung stehen, die die Grenzen $x_1, x_2 \ldots . x_{50}$ der einzelnen Einkommenstufen (nicht nur wie § 21 des Reichsgesetzes die Stufenlängen $x_2 - x_1, x_3 - x_2 \ldots . . x_{50} - x_{49}$) und zu jedem dieser Einkommenbeträge die zugehörigen Steuerbeträge $s_1, s_2 \ldots . s_{50}$ enthält. Bei Verwendung einer solchen Tabelle ist zu jedem x das entsprechende s durch eine Subtraktion, eine Multiplikation mit einer zweistelligen Zahl (dem zwischen 10 und 60 gelegenen Prozentsatz) und darauf folgende Addition zu finden. Dagegen erfordert die Berechnung nach (2) die Division durch eine mehrstellige Zahl, die sich auch durch Heranziehung ausgedehnter Tabellen nicht ganz ausschalten läßt.

Demnach entsteht die folgende (man könnte sagen „umgekehrte") Ausgleichsaufgabe: Man soll eine gegebene, monoton wachsende, nach unten konvexe, stetige Kurve durch ein Polygon von gegebenen Seitenrichtungen und gegebenem Anfangspunkt möglichst gut approximieren. Die vorgegebenen Richtungskoeffizienten sind die Zahlen 0,10, 0,11, 0,12 . . . . . bis 0,59, 0,60. Eine allgemeine und vollständige Lösung dieser Aufgabe wird sehr schwierig sein. Denn man könnte wohl die Abszissen der Polygoneckpunkte als Unbekannte einführen und für diese, etwa aus der Bedingung, daß das Integralquadrat der Abweichungen ein Minimum wird, die entsprechende Zahl linearer Bestimmungsgleichungen ableiten. Allein die so gefundenen Werte würden dann im allgemeinen nicht die notwendige Eigenschaft besitzen, eine einfach aufsteigende Reihe von Zahlen zu bilden. Noch schwieriger wird die Frage dadurch, daß man die Abszissen abrunden will, etwa auf ganze Zahlen, so daß man eigentlich nur die Wahl zwischen abzählbar vielen Polygonen hat.

Eine für alle praktischen Zwecke ausreichende Näherungslösung scheint die folgende zu sein. Man kann mit den vorgeschriebenen Seitenrichtungen leicht das umschriebene Polygon zur Kurve (2) konstruieren, bezw.

berechnen, indem man die Tangenten der betreffenden Richtungen und ihre aufeinanderfolgenden Schnittpunkte bestimmt. Die Ordinaten dieses Polygons sind dann, mit Ausnahme der Berechnungsstellen, durchweg **kleiner** als die der Kurve, der Linienzug geht überdies nicht durch den verlangten Anfangspunkt $x=0$, $s=0$. **Verschiebt** man das Polygon aber parallel zu sich selbst in Richtung der Ordinaten so weit, daß dieser Bedingung Rechnung getragen wird, so wachsen die Ordinaten ein wenig und man darf voraussagen, daß sie dann an vielen Stellen mit denen der Kurve übereinstimmen, jedenfalls, daß zwischen der Kurve und dem Geradlinienzug sehr enge Annäherung besteht. Dabei verändern sich die Abszissen der Eckpunkte bei der Verschiebung nicht, man braucht also bei ihrer Berechnung darauf nicht zu achten.

Differenziert man (1), so findet man für die Abszisse des Berührungspunktes einer Tangente von der Neigung s' den Ausdruck

$$x = -c + \sqrt{a\,c\,\frac{C-c}{s'-a}}, \tag{3}$$

und für die Ordinate des Schnittpunktes der Tangente mit der vertikalen Asymptote $x=-c$ den Ausdruck

$$y = a\,(C-2c) + 2\sqrt{a\,c\,(C-c)\,(s'-a)}. \tag{4}$$

Sind y_1 und y_2 die Werte von (4) für zwei s', die sich um 0,01 unterscheiden, so ist die Abszisse des zugehörigen Tangentenschnittpunktes $100\,(y_1-y_2)-c$. Führt man also die Zahlenwerte für a, C, c in (4) ein und setzt $s'-a = s'-0{,}60 = 0{,}01\,q$, so daß $60-q$ den Abgabeprozentsatz des betreffenden Abschnittes bezeichnet, so ergibt sich für die Abszisse des Abschnitt-Anfanges

$$x_k = -90 + 1280{,}156\,\left(\sqrt{q}-\sqrt{q-1}\right), \tag{5}$$

wo $q = 50, 49 \ldots$ bis herab auf 1. Man erhält so die 50 Eckpunkte sehr einfach aus den Differenzen einer Tafel, die die Quadratwurzeln der Zahlen 1 bis 50 gibt. Z. B. für $q=4$, Grenze der Abschnitte mit 56 vH und 57 vH Abgabe:

$$x_4 = -90 + 1280{,}156 \,.\, 0{,}267949 = 253{,}017.$$

Rechnet man in dieser Weise die Abszissen der 50 Eckpunkte und rundet die kleineren Werte auf ganze Einheiten, die größeren auf ganze Zahlen ab, so ergibt sich folgende Zusammenstellung, der wir zum Vergleich die des vorgeschriebenen Tarifs beifügen.

Ausgeglichener Tarif:

14	Abschnitte	zu	1000 M,	10—23 vH
11	,,	,,	2000 ,,	24—34 ,,
5	,,	,,	3000 ,,	35—39 ,,
3	,,	,,	4000 ,,	40—42 ,,
3	,,	,,	5000 ,,	43—45 ,,
2	,,	,,	6000 ,,	46—47 ,,
5	,,	,,	10000 ,,	48—52 ,,
2	,,	,,	20000 ,,	53—54 ,,
1	,,	,,	30000 ,,	55 ,,
1	,,	,,	40000 ,,	56 ,,
—				
1	,,	,,	70000 ,,	57 ,,
1	,,	,,	120000 ,,	58 ,,
1	,,	,,	750000 ,,	59 ,,

Vorgeschriebener Tarif:

15	Abschnitte	zu	1000 M,	10—24 vH
5	,,	,,	2000 ,,	25—29 ,,
5	,,	,,	3000 ,,	30—34 ,,
—				
10	,,	,,	5000 ,,	35—44 ,,
—				
5	,,	,,	10000 ,,	45—49 ,,
3	,,	,,	20000 ,,	50—52 ,,
2	,,	,,	30000 ,,	53—54 ,,
1	,,	,,	40000 ,,	55 ,,
4	,,	,,	50000 ,,	56—59 ,,

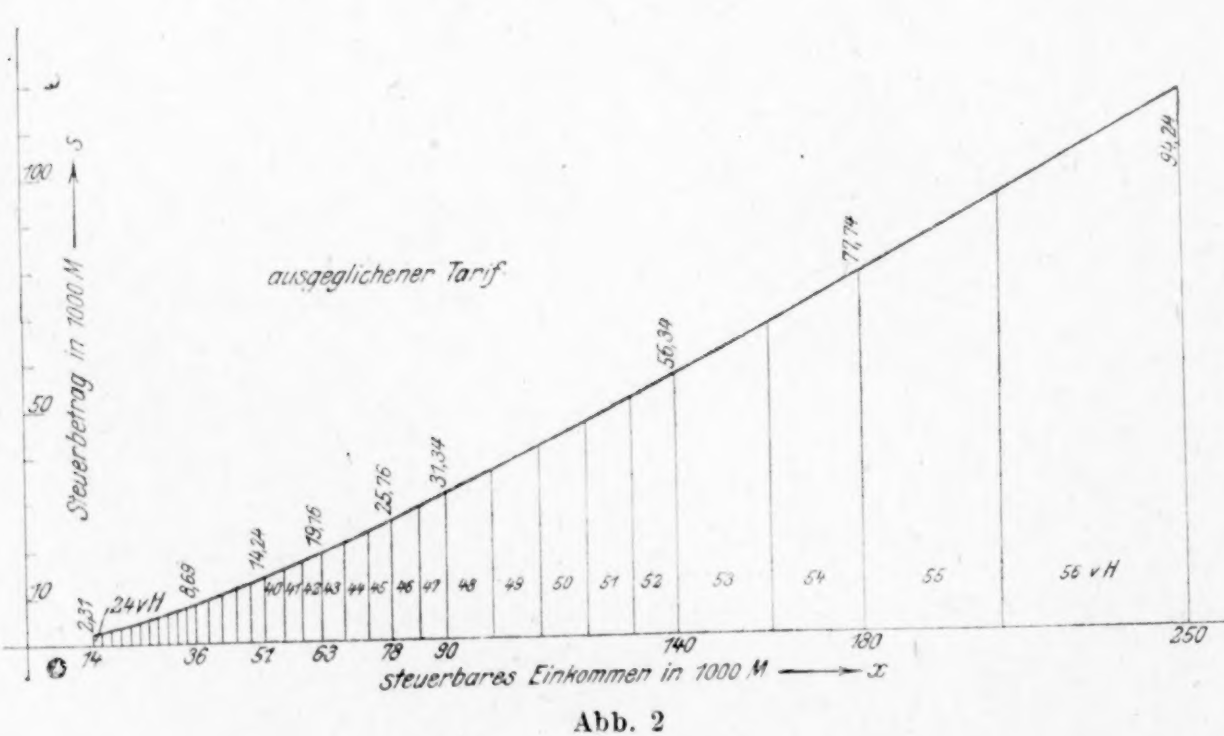


Abb. 2

In Abb. 2 ist das dieser Aufstellung entsprechende Polygon gezeichnet, dessen Eckpunkte, wie man erkennt, eine viel regelmäßigere Anordnung zeigen; die sehr vollständige Übereinstimmung der danach berechneten Steuerbeträge mit den aus der Formel (2) folgen-

den geht aus der letzten Spalte der weiter oben gegebenen Zahlentafel hervor. Zusammenfassend können wir sagen, daß der „ausgeglichene" Tarif gegenüber dem im Gesetz gegebenen durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet wird. Die Abstufungen sind im einzelnen von Willkür frei, also „gerecht", und allein durch die drei Zahlenwerte von α, C und c bestimmt; die genaue Berechnung der Steuerbeträge geschieht in genau gleicher, ebenso einfacher Weise wie nach der Vorschrift des Reichsgesetzes; endlich kann man, ohne eine Tabelle zur Hand zu haben, rasch eine sehr gute Schätzung des Steuerbetrages durch Verwendung der Formel (2) erzielen. Mises.

Ueber das Studium der angewandten Mathematik und die Reformbestrebungen an den Technischen Hochschulen. Es sind jetzt ungefähr 20 Jahre, seit es ein Studium der angewandten Mathematik gibt. Nachdem schon in den neunziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts an der Universität Göttingen, hauptsächlich durch die Bemühungen Kleins, die erforderlichen Einrichtungen ins Leben gerufen wurden, erschien auch in den Prüfungsvorschriften für Lehramtskandidaten „Angewandte Mathematik" als Prüfungsgegenstand und zwar als Ergänzungsfach zur reinen Mathematik. Seitdem bestehen „Angewandte Mathematiker" und nach meinen persönlichen Erfahrungen wird die Prüfung, wenigstens in der letzten Zeit und hier in Berlin, ziemlich häufig abgelegt.

Trotzdem also die Schöpfung Kleins fortlebt, wird man von ihren Daseinsäußerungen im allgemeinen nicht allzu begeistert sein. Diese meine Meinung stützt sich teils auf direkte Beobachtung, teils auf den Umstand, daß die Einrichtung des Studiums der angewandten Mathematik, von Göttingen und von einem neuerlichen Vorstoß in Berlin abgesehen, im allgemeinen nicht so weiter entwickelt worden ist, wie es wünschenswert gewesen wäre.

Zweck des Unterrichtes in der angewandten Mathematik soll es doch sein — abgesehen von den rein wissenschaftlichen Zielen, die immer nur einen kleinen Kreis berühren können —, solche Lehrer der Mathematik heranzubilden, die imstande sind, ihren Schülern den praktischen Wert der Mathematik für das öffentliche Leben darzutun. Nun wird ja Mathematik sehr vielfach gebraucht: in der Geldwirtschaft, in der Meßkunst am Himmel und auf Erden und vor allem in der Technik. Die technischen Anwendungen der Mathematik drängen sich heute dem Jungen der Großstadt allenthalben auf: es wimmelt von Maschinen, elektrischen Einrichtungen und Eisenkonstruktionen. Und wieviel Interesse bei seinen Sekundanern würde der Lehrer finden, der ihnen von allen diesen modernen Wunderdingen erzählen könnte. Auch brauchten gerade Juristen und Theologen, Männer, die allseitig das Leben kennen sollten und doch später im allgemeinen am wenigsten auf der Hochschule Gelegenheit haben, sich mit Mathematik, Physik, Technik zu beschäftigen, am dringendsten von der Schule her einen Einblick in unsere technische Zivilisation.

Der berechtigte Ruf nach größerem Verständnis auch für die kulturellen Werte dieser Entwicklung ertönt allenthalben. Es muß Durchgreifendes geschehen, um unsere Schule dem Geiste unserer Zeit anzupassen, soll sie wirklich imstande sein, unserer Jugend die geistigen Grundlagen unseres Daseins in jeder wesentlichen Richtung zu vermitteln. Die Technik verlangt mit Recht Einfluß auf die Schule, nicht so sehr im eigenen als im Interesse der Allgemeinheit.

Dabei zeigen ihre Vertreter ein hohes Maß von Verständnis, wenn sie keineswegs einen Unterricht in technischen Fächern auf der Schule verlangen, wohl wissend, daß dazu die Schüler nicht reif genug sind. Hingegen fordern sie mit Recht, daß der mathematisch-physikalische Unterricht so technisch gefärbt sei, daß er sowohl die nötige Vorbereitung für das Studium an Technischen Hochschulen denen bietet, die dafür in Frage kommen, als auch allen anderen Verständnis für die geistige Leistung einzuflößen vermag, die in unseren Ingenieurwerken enthalten ist. Die natürliche Bewunderung unserer Jugend für die Großtaten der Ingenieure soll nicht durch eine einseitige Schule unterdrückt werden.

Soll aber ein Mathematiker dazu imstande sein, den Unterricht in diesem Sinne zu gestalten, so muß er während seines Studiums mit der Technik in enge Fühlung getreten sein. Er muß wenigstens ein Laboratorium gesehen und darin mit werdenden Ingenieuren an Maschinen gearbeitet haben. Es genügt nicht, wie es bis jetzt die „Angewandten Mathematiker" fast ausschließlich tun, etwas darstellende Geometrie und graphische Statik, vielleicht noch Geodäsie und Wahrscheinlichkeitsrechnung zu treiben. Schon technische Mechanik fehlt den Kandidaten meist gänzlich, obwohl Kenntnisse in ihr doch das allermindeste bedeuten, will man eine Ahnung von dem Vorgang in einer Maschine haben. Nach meiner Erfahrung haben die wenigsten Kandidaten eine Vorstellung von dem Kräftespiel in und an einem Eisenbahnzug. Und alle diese Fächer sind, vom Standpunkt des Ingenieurs aus gesehen, noch hochtheoretisch, sie geben die gewünschte Fühlung noch nicht in genügendem Maße.

Was soll nun geschehen? Um der Eigenart der Universität und ihren, durch die Staatsfinanzen bedingten Entwicklungsmöglichkeiten gerecht zu werden, mag es einen Studiengang der angewandten Mathematik geben, der ähnlich wie bisher von der darstellenden Geometrie ausgeht, andere graphische Methoden umfaßt, ferner die Grundlagen der technischen Mechanik, Geodäsie und Wahrscheinlichkeitsrechnung angliedert und in praktischen Arbeiten, sei es im Gelände oder im astronomischen Observatorium oder einem besonders hierfür geschaffenen „Institut für angewandte Mathematik" endet. Dieser praktische Abschluß sollte aber unbedingt gefordert werden, damit

an einer Stelle wenigstens, und zwar durch eigene Arbeit, die Berührung mit der Wirklichkeit da ist. Neben diese geometrisch-messende Richtung sollte nun aber weit mehr als bisher eine mechanisch-technische treten. Auch sie beginne mit darstellender Geometrie, nehme aber gleich technische Mechanik in größerem Umfang hinzu (nicht nur graphische Statik), schließe ein allgemein orientierendes Kolleg über irgend ein technisches Fach an und ende mit Arbeiten in einem Laboratorium für Maschinenbau oder ähnlichem durch wenigstens ein Semester.

Kann die erste Richtung ebensogut an einer Universität wie an einer Technischen Hochschule absolviert werden, so gehört die zweite wesentlich an eine Technische Hochschule. Denn es soll ja vor allen Dingen das Zusammenarbeiten mit dem jungen Ingenieur erstrebt werden; auch werden die wenigsten Universitäten imstande sein, Übungen in einem Maschinenbaulaboratorium einzurichten.

Es werden sich also die Technischen Hochschulen mehr als bis jetzt der Ausbildung derjenigen Oberlehrer zuwenden müssen, die neben reiner Mathematik, Physik, Chemie usw. auch die Lehrbefähigung in angewandter Mathematik erwerben wollen. Dementsprechend erstreben die Allgemeinen Abteilungen der Technischen Hochschulen das Recht, Oberlehrer der genannten Art vollständig ausbilden zu dürfen. Bis jetzt durften nur 4 Semester Hochschulstudium dem künftigen Oberlehrer angerechnet werden.

Sind die Technischen Hochschulen dazu befähigt? Diese Frage kann nur im Zusammenhang mit den ganzen Reformplänen der Technischen Hochschulen erörtert werden.

Die Reformbestrebungen lassen sich vielleicht auf diese knappe Formel bringen: Vereinfachung, und zwar sowohl Verkürzung als auch Vereinheitlichung des grundlegenden obligaten Unterrichtes, freiere und mannigfaltigere Gestaltung der Spezialstudien in den höheren Semestern, Ausbau der Allgemeinen Abteilungen sowohl nach der Richtung der Allgemeinbildung wie auch durch Schaffung von Sonderaufgaben dieser Abteilung.

Dementsprechend sind die Anfangsvorlesungen in Mathematik und darstellender Geometrie u. a. nicht unerheblich verkürzt worden. Diese Verkürzung bedingt eine stärkere Konzentration: es muß schneller gelesen und der häuslichen Tätigkeit mehr überlassen bleiben, vor allem fangen, hier in Charlottenburg wenigstens, die Vorlesungen auf einer höheren Stufe an. Wir setzen etwa die Kenntnisse eines guten Abiturienten voraus (doch keine Differential- und Integralrechnung). Zum Ausgleich sind in Charlottenburg Vorkurse im Oktober eingerichtet worden, die sich zu bewähren scheinen. Die Professoren bekommen dadurch etwas mehr Zeit für Spezial-Vorlesungen: Neben der allgemeinen vierstündigen Vorlesung über Mathematik findet jetzt in Charlottenburg eine zweistündige Ergänzung, besonders für Mathematiker statt — sie wird aber auch von mathematisch interessierten Ingenieuren besucht — in der schwierigere, für die Allgemeinheit weniger geeignete Dinge zur Sprache kommen. Im zweiten Jahr schließen sich an die obligate Einleitungsvorlesung, die bis ins dritte Semester geht, immer stärker besuchte Vorlesungen über praktische Mathematik und Vektoranalysis an.

Eine weitere Neueinrichtung Charlottenburgs, die wohl weiter bekannt zu werden verdient, ist eine einleitende Vorlesung über Maschinenwesen: die Professoren der Maschinenbauabteilung halten je einmal im Semester einen zweistündigen Vortrag über ihr Sondergebiet und führen ihre Hörer dann in Fabriken. Der Montagvormittag des ersten Semesters ist diesem Sammelkolleg gewidmet. Dieser Überblick dürfte auch für „Angewandte Mathematiker" sehr nützlich sein.

In höheren Semestern wird jedenfalls von seiten solcher Studierender, die Mathematik und Mechanik als Wahlfächer nehmen wollen, eine stärkere Nachfrage nach mathematischen Spezialvorlesungen entstehen: Funktionentheorie, partielle Differentialgleichungen, spezielle Funktionen, Differentialgeometrie, Integralgleichungen, Differenzenrechnung, Fouriersche Reihen u. ä. finden ja gerade in Ingenieurkreisen heute immer stärkeres Interesse. Hinzu kommen Spezialvorlesungen über Mechanik sowie seminaristische Übungen in praktischer Mathematik und in Mechanik, die ebenso von Ingenieuren wie von angewandten Mathematikern mit Nutzen besucht werden können.

Die allseitig erstrebte Ausgestaltung der Allgemeinen Abteilung nach der Seite der Allgemeinbildung wird auch dem zukünftigen Oberlehrer zu statten kommen: Die Professur für Philosophie wird auf jeden Fall unvermeidlich sein, wenn man nicht die Entwicklung der Technischen Hochschulen an einer empfindlichen Stelle unterbinden will.

Was nun die erwähnten speziellen Aufgaben der Allgemeinen Abteilungen angeht, so handelt es sich noch um folgendes: 1. Ausbildung von Wirtschaftsingenieuren nebst Schaffung des Doktors der Wirtschaftswissenschaften. 2. Ausbildung der Oberlehrer für reine und angewandte Mathematik, Physik und Chemie und entsprechendes Doktorat. 3. Ausbildung von technischen Physikern oder praktischen Mathematikern mit entsprechendem Diplom und Doktorat. 4. Ausbildung von Versicherungsmathematikern. Punkt 1 und 4 interessieren uns, obwohl sehr wichtig, hier weniger. Punkt 3 aber bildet eine wesentliche Ergänzung zu Punkt 2, von dem wir hier hauptsächlich sprechen. Es ist ja klar, daß der Oberlehrer mit der Fakultas für Angewandte Mathematik und der praktische Mathematiker, der als Rechner oder theoretischer Arbeiter in ein industrielles Werk geht, in mancher Beziehung parallele Ausbildung erhalten müssen. Werden die Wünsche der Technischen Hochschulen erfüllt, so gibt es eine fast kontinuierliche Linie vom konstruierenden Ingenieur über den technischen Physiker und den in der Technik

tätigen Mathematiker zum „Angewandten Mathematiker“ und mancher zunächst noch Unentschlossene kann sich erst später über seine Neigungen endgültig klar werden. Wirtschaftlich dürfte sich hier auch manche günstige Aussicht eröffnen, und für die Allgemeinheit eine bessere Ausnutzung der vorhandenen Begabungen.

Daß also die angewandte Mathematik an die Hochschule paßt und vollauf gelehrt werden kann, dürfte nach Vorstehendem klar sein. Aber kann auch die Hochschule die dazu erforderliche reine Mathematik lehren? Denn daran wird man unbedingt festhalten müssen: Keine angewandte Mathematik ohne reine Mathematik!

Da wird man zweierlei unterscheiden müssen: die mathematisch-logische Schulung und das konkrete mathematische Wissen. Und sicher werden die Fachgenossen dem zustimmen, daß vor allem die erstere den Mathematiker ausmacht.

Nun kann aber die mathematisch-logische Schulung auch an der Technischen Hochschule vollwertig gegeben werden. Die einleitende Vorlesung über Höhere Mathematik sollte an der Technischen Hochschule ebenso streng sein wie an der Universität — denn eine unstrenge Mathematik ist keine Mathematik —, nur daß vielleicht einige Grundsätze als anschaulich einleuchtend hingestellt werden, ohne nähere Begründung ihrer Abhängigkeit und Zulässigkeit. Die für den Mathematiker notwendige Arithmetisierung kann aber in der oben erwähnten zweistündigen Ergänzung vorgetragen werden. Ebenso wird man in der Funktionentheorie verfahren: nach einer elementaren Vorlesung, die von anschaulichen Begriffen ausgeht, die der Mathematiker schon im dritten oder vierten, der Ingenieur im fünften oder sechsten Semester hören kann, wird man dem Mathematiker noch eine kurze Ergänzung geben müssen, die sich mit der modernen mengentheoretischen Grundlegung befaßt. Notwendig zur mathematisch-logischen Schulung werden dann noch kurze Vorlesungen und Seminarübungen über die Grundlagen sein.

Was das konkrete mathematische Wissen anbetrifft, so wird man allerdings dem Mathematiker schon in den ersten Semestern Vorlesungen über Algebra, analytische Geometrie und Zahlentheorie bringen müssen, die aber nur kurz zu sein brauchen, da das wichtigste aus Algebra und analytischer Geometrie schon in der Hauptvorlesung über Höhere Mathematik vorgetragen wird. Im weiteren wird eine gewisse Beschränkung in dieser Hinsicht obwalten müssen, indem die angewandte Mathematik bezw. die oben erwähnten, auch für den Ingenieur bedeutungsvollen Teile der Analysis und der Geometrie bis zu einem gewissen Grade als Ersatz eintreten können. Auch kleine Universitäten können ja nur eine bescheidene und sicher immer irgendwie einseitige Auswahl aus der ganzen Mathematik bringen. Die Freizügigkeit zwischen den Hochschulen und Universitäten und vielleicht auch eine anzustrebende Arbeitsgemeinschaft zwischen benachbarten Hochschulen muß hier den nötigen Ausgleich schaffen.

Alles in allem wird man also wohl die Frage, ob die Technischen Hochschulen Mathematiker ausbilden können, bejahen müssen, wenn der geplante Ausbau der Allgemeinen Abteilungen stattfindet.

Nur zweierlei möchte ich noch im Zusammenhange hiermit betonen:

Erstens: Hauptaufgabe der Allgemeinen Abteilung der Technischen Hochschule muß immer die Ausbildung der Ingenieure bleiben. Es würde sehr schädlich für beide Teile, für die Mathematik und auch für die Technik, sein, wenn die Sache anders würde, oder auch nur die Idee entstünde, die Allgemeine Abteilung wolle von ihrer alten Aufgabe fort. Das will sie nicht — ich hoffe hier im Namen aller Fachkollegen an Technischen Hochschulen zu sprechen — sie will nur eine Krönung ihrer Aufgabe erreichen. Und ich glaube, gerade im vorhergehenden gezeigt zu haben, daß sich die Ausbildung der Mathematiker angliedern läßt, ohne daß eine Entfremdung der Professoren der Mathematik von ihrer alten Aufgabe eintritt.

Zweitens: die Ausbildung der Mathematiker an den Technischen Hochschulen soll in möglichster Gemeinschaft mit der der Ingenieure stattfinden. Besondere Vorlesungen für sie sollten nur zur Ergänzung, nicht als Ersatz gehalten werden. Denn sonst wird die Durchtränkung der künftigen Lehrer mit technischem Geiste nicht erzielt. Auch sollte Mathematik an Technischen Hochschulen nur in Verbindung mit angewandter Mathematik studiert werden, da, wie gesagt, die Anwendungen bis zu einem gewissen Grade das reine Fachwissen in der Mathematik ersetzen müssen. Andererseits kann es für den Ingenieur auch nur nützlich sein, wenn er eine streng und ernsthaft betriebene Mathematik kennen lernt. Seine Achtung vor ihr kann dann nur steigen. 21

Berlin, den 4. Januar 1921. Hamel.

NACHRICHTEN

Ausschüsse für technische Mechanik. Innerhalb des Berliner Bezirksvereines des Vereines deutscher Ingenieure hat sich im Jahre 1919 ein Ausschuß gebildet, der sich die Pflege der technischen Mechanik im weitesten Sinne des Wortes zur Aufgabe macht. Er hält regelmäßig am zweiten Montag jeden Monates, und nach Bedarf auch in der Zwischenzeit, eine Versammlung ab, in der an einen einschlägigen Vortrag eine eingehende Besprechung anschließt. Gäste sind bei den Versammlungen willkommen. Bisher wurden u. a.

folgende Vorträge gehalten: Von Prof. Eug. Meyer über die Ausgestaltung des Mechanikunterrichtes, von Prof. M. Weber über Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik, von Prof. Rüdenberg über elektrische Wanderwellen, von Prof. Gümbel über graphische Integration, über Schmiermittelreibung, über gedämpfte Schwingungen, von Prof. Heyn über Eigenspannungen und über Verfestigung, von Dr. Drexler über Verwendung des Kreisels im Flugzeug, von Obering. Duffing über Schwingungen mit großem Ausschlag, über numerische Integration, von Dr. Hort über schnellaufende Wellen, über Geschwindigkeitsmesser, von Prof. Breysig über mechanische Schwingungssysteme als Modelle der Funkentelegraphie, von Dr. Everling über Längsschwingungen von Flugzeugen, über die „wahre" Neigung von Flugzeugen, über Zirkulationstheorie, von Prof. Rothe über einige Aufgaben der praktischen Mathematik, von Obering. Wichert über Schüttelerscheinungen bei elektrischen Bahnen, von Prof. Hamel über Vektorenrechnung, über Integralgleichungen, von Prof. Wallenberg über Differenzengleichungen, über konforme Abbildung, von Dr.-Ing. Thoma über Beanspruchung dünner zylindrischer Wände, von Reg.-Rat Felgenträger über Formänderungen an Wagen, von Dipl.-Ing. Melchior über Kreuzkopfdruck an Lokomotiven, über eine logarithmische Integriervorrichtung, von Prof. v. Mises über Tragflächenauftrieb. Für die nächste Zeit sind in Aussicht genommen Vorträge von Prof. Bennewitz (Elastische Nachwirkung), Prof. Reißner (Berechnung von Windrädern), Prof. Thoma (Kraftmaschinenregler), Prof. Duffing (Riemenspannung und Leitrollengetriebe).

Das Beispiel des Berliner Bezirksvereines hat auch schon anderwärts mehrfach Nachahmung gefunden. Wir erblicken darin ein erfreuliches Zeichen für das Wiedererwachen des Interesses an den theoretischen Grundwissenschaften der Technik innerhalb des Kreises der praktisch tätigen Ingenieure. Der Begründer des Berliner Ausschusses, Prof. Gümbel, und sein gegenwärtiger Vorsitzender, Prof. Rüdenberg, haben sich gewiß große Verdienste erworben. Wir werden der weiteren Entwicklung dieser Ausschüsse volle Aufmerksamkeit zuwenden und über ihre Tätigkeit fortlaufend berichten.

Reichsverband deutscher mathematischer Gesellschaften und Vereine. Am 6. Januar d. J. hat sich in Göttingen der „Reichsverband deutscher mathematischer Gesellschaften und Vereine" konstituiert. Er hat den Zweck, die Bedeutung der Mathematik im öffentlichen Leben zur Geltung zu bringen, eine gemeinschaftliche Vertretung aller mathematischen Berufsstände herbeizuführen und insbesondere die Interessen des mathematischen Unterrichtes aller Stufen zu wahren. Die Gründung ging von der deutschen Mathematiker-Vereinigung aus, die innerhalb des Verbandes als die größte wissenschaftliche Mathematiker-Organisation weiter bestehen bleibt. Ferner haben an der Gründung teilgenommen die mathematischen Gesellschaften Berlin, Wien, Hamburg und Göttingen, die Groß-Berliner Vereinigung zur Förderung des mathematischen Unterrichtes und der mathematisch-naturwissenschaftliche Verein von Württemberg. Es wurde ein vorläufiger Ausschuß gewählt, der die weiteren Schritte, insbesondere den Entwurf der Verbandssatzungen, durchzuführen hat. Dieser Ausschuß besteht aus den Herren Prof. Dr. G. Hamel von der Technischen Hochschule in Charlottenburg als Vorsitzendem, Direktor Lötzbeyer von der Oberrealschule in Neukölln und Prof. Dr. I. Schur von der Universität Berlin.

Herausgabe der Werke von Felix Klein. Zum fünfzigjährigen Doktor-Jubiläum Felix Kleins am 10. Dezember 1918 haben seine Freunde und Schüler, soweit die Verbindung mit ihnen durch den Krieg nicht gestört war, eine Stiftung errichtet, die eine Herausgabe der gesammelten mathematischen Abhandlungen Kleins unter Leitung des Verfassers ermöglichen sollte. Von dem auf drei Bände berechneten Werk ist jetzt der erste Band, herausgegeben von R. Fricke und A. Ostrowski, bei Springer erschienen. Er umfaßt in reicher Fülle die Arbeiten geometrischer Richtung, die von der Doktordissertation Kleins über Liniengeometrie und der berühmten Antrittsvorlesung des jungen Erlanger Ordinarius (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen) ihren Ausgangspunkt nehmen. Auf den Inhalt einzelner dieser Arbeiten, an die sich zum Teil eine umfassende Entwicklung angeknüpft hat, und insbesondere auf ihre vielfältigen Beziehungen zu verschiedenen Problemstellungen der angewandten Mathematik (vergl. im Einführungsaufsatz, dieses Heft, S. 7 u. 8), wird noch genauer einzugehen sein. Hier sei nur bemerkt, daß ein besonderer Reiz der Neuausgabe in den zahlreichen Bemerkungen und Zusätzen persönlicher Natur liegt, mit denen der Verfasser Einblick in seinen Entwicklungsgang und seine Schaffensweise bietet. Die letzten Abhandlungen des Bandes, die aus den Jahren 1917 und 1918 stammen und die grundlegenden Gedankengänge Kleins für den mathematischen Ausbau der Relativitätstheorie verwerten, lassen die noch lebendige Schaffenskraft des Autors erkennen und den Wunsch entstehen, daß ihm noch eine lange Zeit ebenso reicher Wirksamkeit wie bisher beschieden sein möchte.

Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik. An Stelle des am 9. Juni v. J. verstorbenen Geheimrats Dr. v. Böttinger hat Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. C. Duisberg in Leverkusen a./Rh. den Vorsitz übernommen. Zweiter Vorsitzender ist Geheimer Reg.-Rat Professor Dr. F. Klein.

(Redaktionsschluß 15. Februar 1921.)

Druck von A. W. Schade, Berlin N. 39.